最优化方法

东南大学
计算机&人工智能学院
宋沫飞
songmf@seu.edu.cn

凸优化问题

- 优化问题的标准形式
- 凸优化问题
- 拟凸优化
- 线性优化
- 二次优化
- 广义不等式约束
- 半定规划
- 向量优化

优化问题的标准形式

优化问题的标准形式

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p\end{array}$$

优化问题的标准形式

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\
 & h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- $x \in \mathbf{R}^n$ 优化变量

优化问题的标准形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
 & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- $x \in \mathbf{R}^n$ 优化变量
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 目标函数或代价函数

优化问题的标准形式

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f_0(x) & \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p \end{array}$$

- $x \in \mathbf{R}^n$ 优化变量
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 目标函数或代价函数
- $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$ 不等式约束函数

优化问题的标准形式

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- $x \in \mathbf{R}^n$ 优化变量
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 目标函数或代价函数
- $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$ 不等式约束函数
- $h_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 等式约束函数

优化问题的标准形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- $x \in \mathbf{R}^n$ 优化变量
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 目标函数或代价函数
- $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$ 不等式约束函数
- $h_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 等式约束函数
- $m = p = 0$: 无约束

优化问题的标准形式

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \ \cap \ \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i$$

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \ \cap \ \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i$$

- 可行解集: $x \in \mathcal{D}$ 为可行解，若其满足

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \ \cap \ \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i$$

- 可行解集：$x \in \mathcal{D}$ 为可行解，若其满足

$$f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,$$

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \ \cap\ \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i$$

- 可行解集：$x \in \mathcal{D}$ 为可行解，若其满足

$$f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$
$$h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p.$$

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \ \cap \ \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i$$

- 可行解集：$x \in \mathcal{D}$ 为可行解，若其满足

$$f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,$$
$$h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p.$$

- 最优值：

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \;\cap\; \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i$$

- 可行解集: $x \in \mathcal{D}$ 为可行解，若其满足

$$f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,$$
$$h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p.$$

- 最优值:

$$p^\star = \inf\{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p\}$$

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \;\cap\; \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i$$

- 可行解集：$x \in \mathcal{D}$ 为可行解，若其满足

$$f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,$$
$$h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p.$$

- 最优值：

$$p^\star = \inf\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p\}$$

  - 若问题无可行解(无x满足约束)，则 $p^\star = \infty$

优化问题的标准形式

- 优化问题的域

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \;\cap\; \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i$$

- 可行解集: $x \in \mathcal{D}$ 为可行解，若其满足

$$f_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m,$$
$$h_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, p.$$

- 最优值:

$$p^\star = \inf\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, p\}$$

  - 若问题无可行解(无x满足约束)，则 $p^\star = \infty$
  - 若问题无下界，则 $p^\star = -\infty$

优化问题的标准形式

优化问题的标准形式

- 最优解x^*：若x^*可行，且$f_0(x^*) = p^*$

优化问题的标准形式

- 最优解x^*：若x^*可行，且$f_0(x^*) = p^*$
- 最优解集

优化问题的标准形式

- 最优解x^*：若x^*可行，且$f_0(x^*) = p^*$
- 最优解集

$$X_{\mathrm{opt}} = \{x \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p,\ f_0(x) = p^\star\}$$

优化问题的标准形式

- 最优解x^*： 若x^*可行，且$f_0(x^*) = p^*$
- 最优解集

$$X_{\rm opt} = \{x \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p,\ f_0(x) = p^\star\}$$

- ϵ-次优解集 $\epsilon > 0$

优化问题的标准形式

- 最优解x^*：若x^*可行，且$f_0(x^*) = p^*$
- 最优解集

$$X_{\mathrm{opt}} = \{x \mid f_i(x) \le 0,\ i=1,\ldots,m,\ h_i(x)=0,\ i=1,\ldots,p,\ f_0(x)=p^\star\}$$

- ϵ-次优解集 $\epsilon > 0$

$$f_0(x) \le p^\star + \epsilon$$

局部最优点

局部最优点

- x为局部最优点，若存在一个正实数R，使得

局部最优点

- x为局部最优点，若存在一个正实数R，使得

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(z) \\
\text{subject to} & f_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, p \\
& \|z - x\|_2 \leq R
\end{array}
$$

局部最优点

- x为局部最优点，若存在一个正实数R，使得

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(z) \\
\text{subject to} & f_i(z) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, p \\
& \|z - x\|_2 \le R
\end{array}
$$

(with $n = 1$, $m = p = 0$)

局部最优点

- x为局部最优点，若存在一个正实数R，使得

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(z) \\
\text{subject to} & f_i(z) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, p \\
& \|z - x\|_2 \leq R
\end{array}
$$

(with $n = 1$, $m = p = 0$)

$f_0(x) = 1/x$, $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbf{R}_{++}$: $p^\star = 0$, 无最优点

$f_0(x) = -\log x$, $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbf{R}_{++}$: $p^\star = -\infty$

$f_0(x) = x \log x$, $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbf{R}_{++}$: $p^\star = -1/e$, $x = 1/e$ 为最优点

$f_0(x) = x^3 - 3x$, $p^\star = -\infty$, 局部最优点： $x = 1$

不等式约束

不等式约束

- $f_i(x) \leq 0$ 活动约束

不等式约束

- $f_i(x) \leq 0$ 活动约束
- $f_i(x) < 0$ 不活动约束

不等式约束

- $f_i(x) \le 0$ 活动约束
- $f_i(x) < 0$ 不活动约束

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

不等式约束

- $f_i(x) \le 0$ 活动约束
- $f_i(x) < 0$ 不活动约束

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & \boxed{f_i(x) \le 0,} \quad i = 1, \ldots, m \qquad \boxed{f_i(x) < 0} \\
& h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

不等式约束

- $f_i(x) \le 0$ 活动约束
- $f_i(x) < 0$ 不活动约束

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f_0(x) & \\ \text{subject to} & \boxed{f_i(x) \le 0,} & i = 1, \ldots, m \qquad \boxed{f_i(x) < 0} \\ & h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p \end{array}$$

$$f(x) < 100$$

不等式约束

- $f_i(x) \leq 0$ 活动约束
- $f_i(x) < 0$ 不活动约束

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f_0(x) & \\
\text{subject to} & \boxed{f_i(x) \leq 0,} & i = 1, \ldots, m \qquad \boxed{f_i(x) < 0} \\
 & h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

$$f(x) < 100$$

$$f(x) \leq 100$$

不等式约束

- $f_i(x) \le 0$ 活动约束
- $f_i(x) < 0$ 不活动约束

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f_0(x) & \\ \text{subject to} & \boxed{f_i(x) \le 0,} & i = 1, \ldots, m \qquad \boxed{f_i(x) < 0} \\ & h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p \end{array}$$

$$f(x) < 100$$

$$f(x) \le 100$$

$$-|\log(100 - x)| \le 0$$

可行性优化问题

可行性优化问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{find} & x & \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p.
\end{array}
$$

等价问题

等价问题

- 例：盒子约束

等价问题

- 例：盒子约束

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \ldots, n,
\end{array}
$$

等价问题

- 例：盒子约束

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & l_i \le x_i \le u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & l_i - x_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ & x_i - u_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

等价问题

等价问题

- 缩放

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

等价问题

- 缩放

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \tilde{f}(x) = \alpha_0 f_0(x) \\
\text{subject to} & \tilde{f}_i(x) = \alpha_i f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& \tilde{h}_i(x) = \beta_i h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p,
\end{array}
$$

等价问题

等价问题

- $\psi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$单调递增

等价问题

- $\psi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$单调递增
  $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

等价问题

- $\psi_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$单调递增

  $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $\qquad \psi_i(u) \leq 0 \leftrightarrow u \leq 0$

等价问题

- $\psi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$单调递增

  $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\quad \psi_i(u) \le 0 \leftrightarrow u \le 0$

  $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_{m+p} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

等价问题

- $\psi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$单调递增
  $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\quad \psi_i(u) \leq 0 \leftrightarrow u \leq 0$
  $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_{m+p} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\quad \psi_i(u) = 0 \leftrightarrow u = 0$

等价问题

- $\psi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 单调递增

  $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad \psi_i(u) \leq 0 \leftrightarrow u \leq 0$

  $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_{m+p} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \psi_i(u) = 0 \leftrightarrow u = 0$

$$\tilde{f}_i(x) = \psi_i(f_i(x)), \quad i = 0, \ldots, m,$$

等价问题

- $\psi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$单调递增

  $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad \psi_i(u) \leq 0 \leftrightarrow u \leq 0$

  $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_{m+p} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \psi_i(u) = 0 \leftrightarrow u = 0$

$$\tilde{f}_i(x) = \psi_i(f_i(x)), \quad i = 0, \ldots, m,$$

$$\tilde{h}_i(x) = \psi_{m+i}(h_i(x)), \quad i = 1, \ldots, p.$$

等价问题

- $\psi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$单调递增

  $\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad \psi_i(u) \le 0 \leftrightarrow u \le 0$

  $\psi_{m+1}, \ldots, \psi_{m+p} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \psi_i(u) = 0 \leftrightarrow u = 0$

$$\tilde{f}_i(x) = \psi_i(f_i(x)), \quad i = 0, \ldots, m,$$

$$\tilde{h}_i(x) = \psi_{m+i}(h_i(x)), \quad i = 1, \ldots, p.$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \tilde{f}_0(x) \\ \text{subject to} & \tilde{f}_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \tilde{h}_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p \end{array}$$

等价问题

等价问题

- 例：

等价问题

- 例： $\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2$

等价问题

- 例： $\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2$

  $\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$

等价问题

- 例：
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|Ax-b\|_2 \\ \text{minimize} & \|Ax-b\|_2^2 \end{array}$$

- 消除等式约束

等价问题

- 例： $$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|_2$$
  $$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|_2^2$$

- 消除等式约束

$$h_i(x)=0, \quad i=1,\ldots,p,$$

等价问题

- 例： $$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|_2$$
  $$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|_2^2$$

- 消除等式约束
  $$h_i(x)=0, \quad i=1,\ldots,p,$$
  $$z \in \mathbf{R}^k \quad \phi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n \quad x=\phi(z)$$

等价问题

- 例： $$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|_2$$
$$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|_2^2$$

- 消除等式约束

$$h_i(x)=0, \quad i=1,\ldots,p,$$

$$z \in \mathbf{R}^k \quad \phi:\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n \quad x=\phi(z)$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \tilde{f}_0(z)=f_0(\phi(z)) \\ \text{subject to} & \tilde{f}_i(z)=f_i(\phi(z)) \le 0, \quad i=1,\ldots,m \end{array}$$

等价问题

等价问题

- 消除线性等式约束 $Ax = b$

等价问题

- 消除线性等式约束 $Ax = b$

  $\mathcal{R}(F) = \mathcal{N}(A)$

等价问题

- 消除线性等式约束 $Ax = b$

  $\mathcal{R}(F) = \mathcal{N}(A)$

  $x = Fz + x_0$

等价问题

- 消除线性等式约束 $Ax = b$

$$\mathcal{R}(F) = \mathcal{N}(A)$$

$$x = Fz + x_0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p \end{array}$$

等价问题

- 消除线性等式约束 $Ax = b$

$$\mathcal{R}(F) = \mathcal{N}(A)$$

$$x = Fz + x_0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(Fz + x_0) \\ \text{subject to} & f_i(Fz + x_0) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

凸优化问题

凸优化问题

- 凸优化问题的标准形式

凸优化问题

- 凸优化问题的标准形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

凸优化问题

- 凸优化问题的标准形式

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m \\
 & a_i^T x = b_i, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

  - $f_0, f_1, \ldots, f_m$ 为凸函数；等式约束为仿射函数

凸优化问题

- 凸优化问题的标准形式

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\
& a_i^T x = b_i, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

  - $f_0, f_1, \ldots, f_m$ 为凸函数；等式约束为仿射函数
- 通常，该问题可简写为

凸优化问题

- 凸优化问题的标准形式

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \ldots, p \end{array}$$

  - $f_0, f_1, \ldots, f_m$ 为凸函数；等式约束为仿射函数
- 通常，该问题可简写为

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

凸优化问题

- 凸优化问题的标准形式

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \ldots, p \end{array}$$

  - $f_0, f_1, \ldots, f_m$ 为凸函数；等式约束为仿射函数

- 通常，该问题可简写为

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

- 重要的性质：凸优化问题的可行解集为凸集

例子

例子

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\
\text{subject to} & f_1(x) = x_1/(1 + x_2^2) \le 0 \\
& h_1(x) = (x_1 + x_2)^2 = 0
\end{array}
$$

例子

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & f_1(x) = x_1/(1+x_2^2) \le 0 \\ & h_1(x) = (x_1+x_2)^2 = 0 \end{array}$$

- f_0为凸函数，可行解集$\{(x_1, x_2) \mid x_1 = -x_2 \le 0\}$为凸集

例子

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & f_1(x) = x_1/(1+x_2^2) \leq 0 \\ & h_1(x) = (x_1+x_2)^2 = 0 \end{array}$$

- f_0为凸函数，可行解集$\{(x_1, x_2) \mid x_1 = -x_2 \leq 0\}$为凸集
- 狭义上不是凸优化问题：f_1不是凸函数，h_1不是仿射函数

例子

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & f_1(x) = x_1/(1+x_2^2) \leq 0 \\ & h_1(x) = (x_1+x_2)^2 = 0 \end{array}$$

- f_0为凸函数，可行解集$\{(x_1, x_2) \mid x_1 = -x_2 \leq 0\}$为凸集
- 狭义上不是凸优化问题：f_1不是凸函数，h_1不是仿射函数
- 广义上是凸优化问题

例子

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & f_1(x) = x_1/(1+x_2^2) \le 0 \\ & h_1(x) = (x_1+x_2)^2 = 0 \end{array}$$

- f_0为凸函数，可行解集$\{(x_1, x_2) \mid x_1 = -x_2 \le 0\}$为凸集
- 狭义上不是凸优化问题：f_1不是凸函数，h_1不是仿射函数
- 广义上是凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & x_1 \le 0 \\ & x_1 + x_2 = 0 \end{array}$$

凸优化问题

凸优化问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(Fz + x_0) \\ \text{subject to} & f_i(Fz + x_0) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(Fz + x_0) \\ \text{subject to} & f_i(Fz + x_0) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = Fz + x_0 \text{ for some } z$$

凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(Fz + x_0) \\ \text{subject to} & f_i(Fz + x_0) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = Fz + x_0 \text{ for some } z$$

- 实际过程中，并不能减少问题求解难度

松弛变量

松弛变量

- $$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

松弛变量

- $$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize (over } x, \ s) & f_0(x) \\ \text{subject to} & a_i^T x + s_i = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & s_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots m \end{array}$$

拟凸优化问题

拟凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \dots, p \end{array}$$

拟凸优化问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- 目标函数为拟凸函数

拟凸优化问题

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x)\\ \text{subject to} & f_i(x)\le 0,\quad i=1,\dots,m\\ & a_i^T x = b_i,\quad i=1,\dots,p\end{array}$$

- 目标函数为拟凸函数
- 其他和凸问题一致
  - 若目标函数为拟凹函数?

局部和全局最优解

局部和全局最优解

- 凸优化问题的任意局部最优解也是全局最优解

局部和全局最优解

- 凸优化问题的任意局部最优解也是全局最优解
- 证明：假设x是局部最优解，且存在一个可行的y满足x是局部最优解，则存在 $R > 0$ 使得 $f_0(y) < f_0(x)$

局部和全局最优解

- 凸优化问题的任意局部最优解也是全局最优解
- 证明：假设x是局部最优解，且存在一个可行的y满足x是局部最优解，则存在 $R > 0$ 使得 $f_0(y) < f_0(x)$
- 考虑 z 为可行 $\|z - x\|_2 \leq R \implies f_0(z) \geq f_0(x)$

局部和全局最优解

- 凸优化问题的任意局部最优解也是全局最优解
- 证明：假设x是局部最优解，且存在一个可行的y满足x是局部最优解，则存在 $R>0$ 使得 $f_0(y)<f_0(x)$
- 考虑 z 为可行 $\|z-x\|_2 \leq R \implies f_0(z) \geq f_0(x)$
- 则有 $z=\theta y+(1-\theta)x$ with $\theta=R/(2\|y-x\|_2)$

局部和全局最优解

- 凸优化问题的任意局部最优解也是全局最优解
- 证明：假设x是局部最优解，且存在一个可行的y满足x是局部最优解，则存在 $R > 0$ 使得 $f_0(y) < f_0(x)$
- 考虑 z 为可行 $\|z - x\|_2 \leq R \implies f_0(z) \geq f_0(x)$
- 则有 $z = \theta y + (1 - \theta)x$ with $\theta = R/(2\|y - x\|_2)$
- $\|y - x\|_2 > R$，因此 $0 < \theta < 1/2$

局部和全局最优解

- 凸优化问题的任意局部最优解也是全局最优解
- 证明：假设x是局部最优解，且存在一个可行的y满足x是局部最优解，则存在 $R>0$ 使得 $f_0(y)<f_0(x)$
- 考虑 z 为可行 $\|z-x\|_2 \le R \implies f_0(z)\ge f_0(x)$
- 则有 $z=\theta y+(1-\theta)x$ with $\theta = R/(2\|y-x\|_2)$
- $\|y-x\|_2 > R$，因此 $0<\theta<1/2$
- z 为两个可行点的凸组合，因此$\|z-x\|_2 = R/2$

  且

$$f_0(z)\le \theta f_0(y)+(1-\theta)f_0(x) < f_0(x)$$

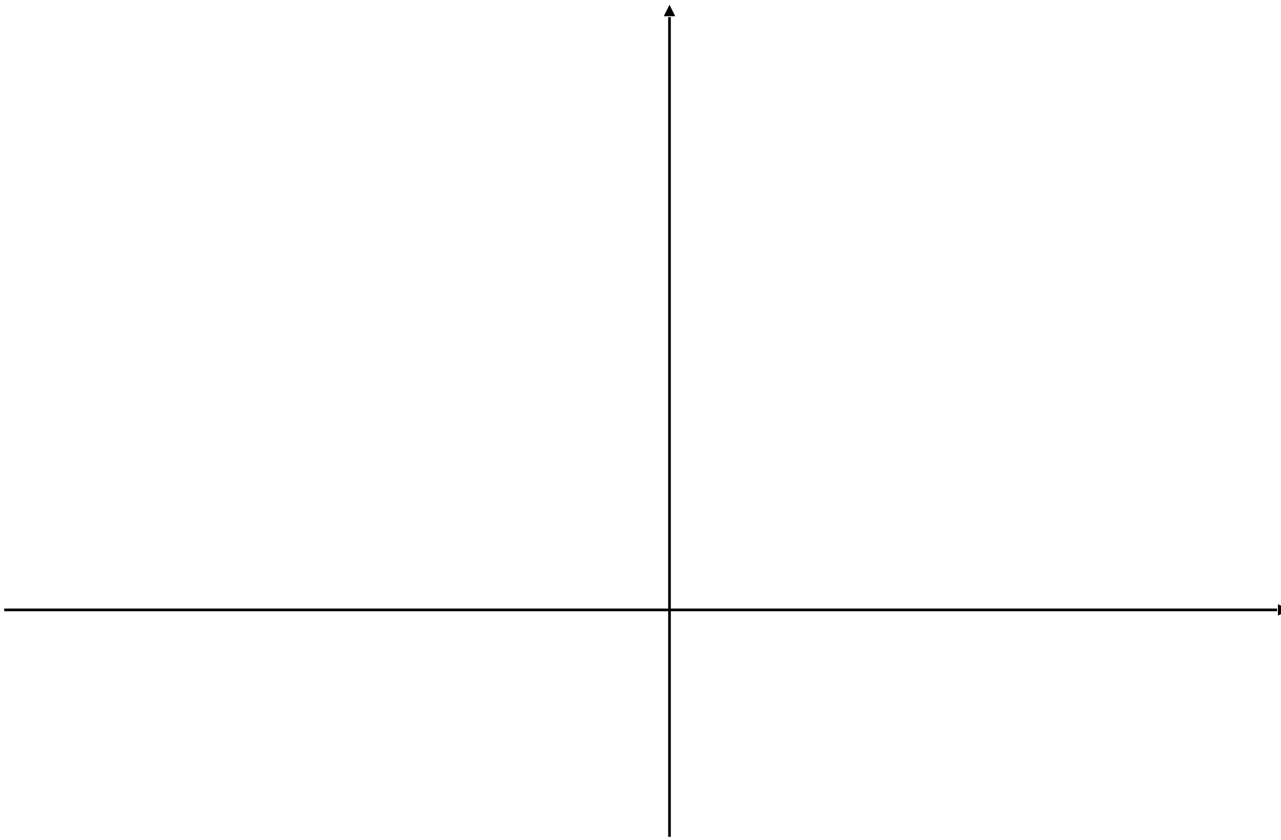
局部和全局最优解

- 凸优化问题的任意局部最优解也是全局最优解
- 证明：假设*x*是局部最优解，且存在一个可行的*y*满足*x*是局部最优解，则存在 $R > 0$ 使得 $f_0(y) < f_0(x)$
- 考虑 z 为可行 $\|z - x\|_2 \leq R \implies f_0(z) \geq f_0(x)$
- 则有 $z = \theta y + (1-\theta)x$ with $\theta = R/(2\|y - x\|_2)$
- $\|y - x\|_2 > R$，因此 $0 < \theta < 1/2$
- z 为两个可行点的凸组合，因此 $\|z - x\|_2 = R/2$ 且

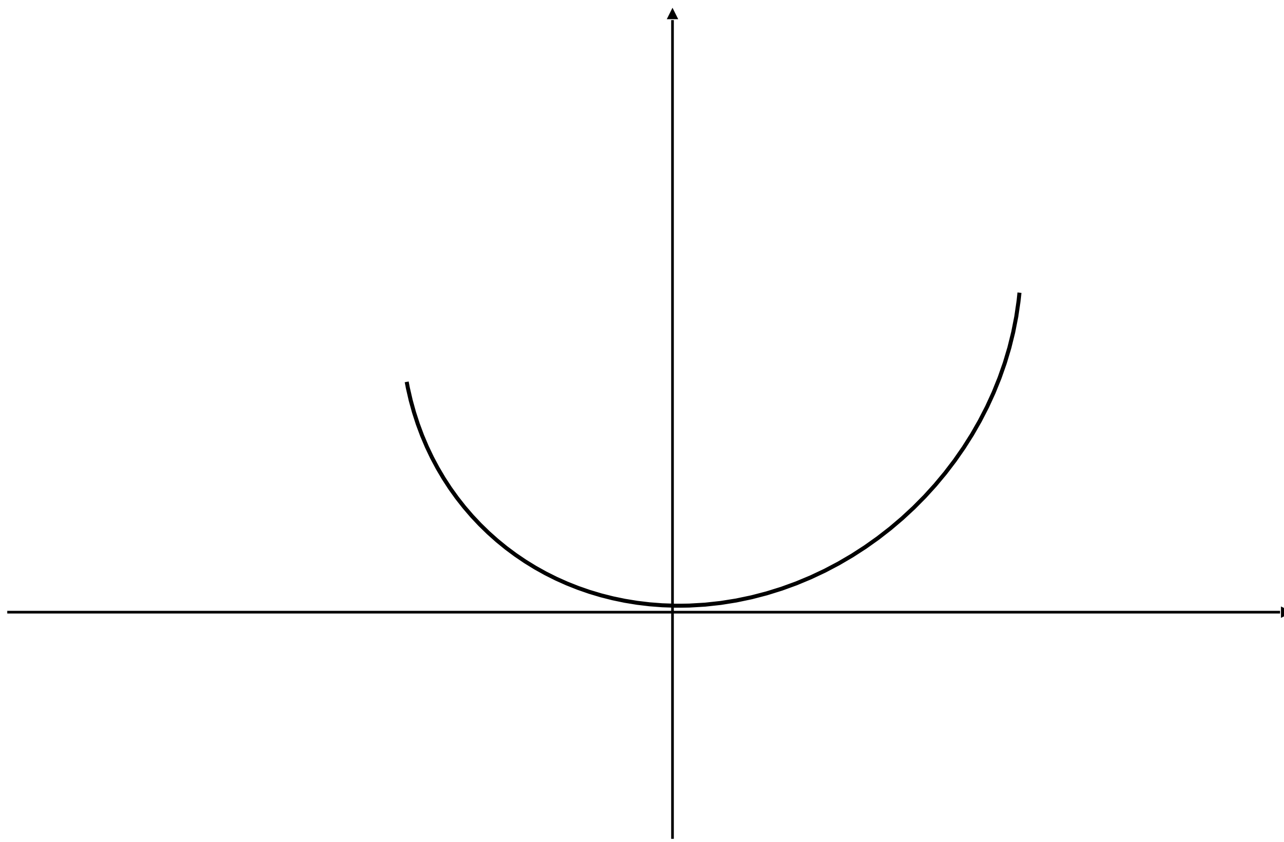
$$f_0(z) \leq \theta f_0(y) + (1-\theta) f_0(x) < f_0(x)$$

- 和*x*是局部最优解相矛盾

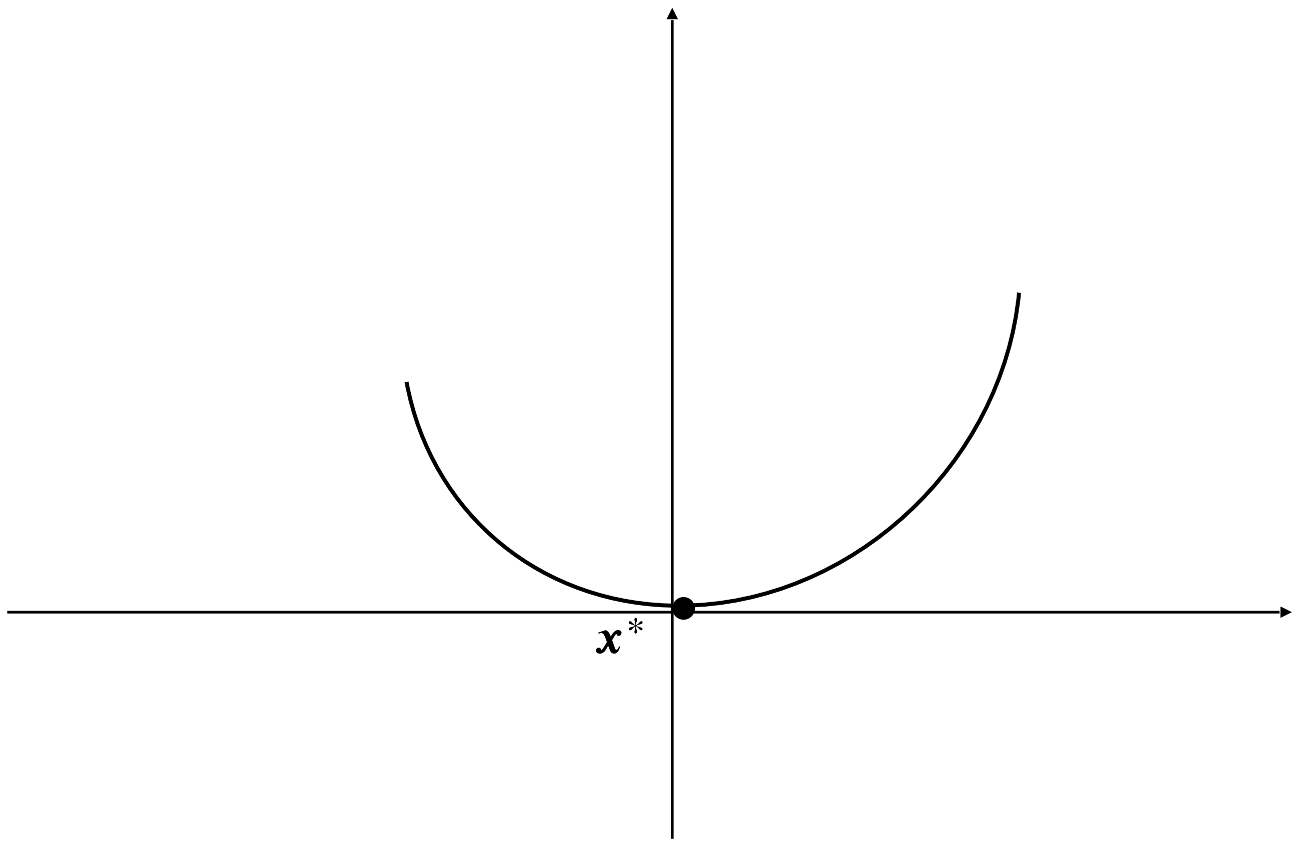
局部和全局最优



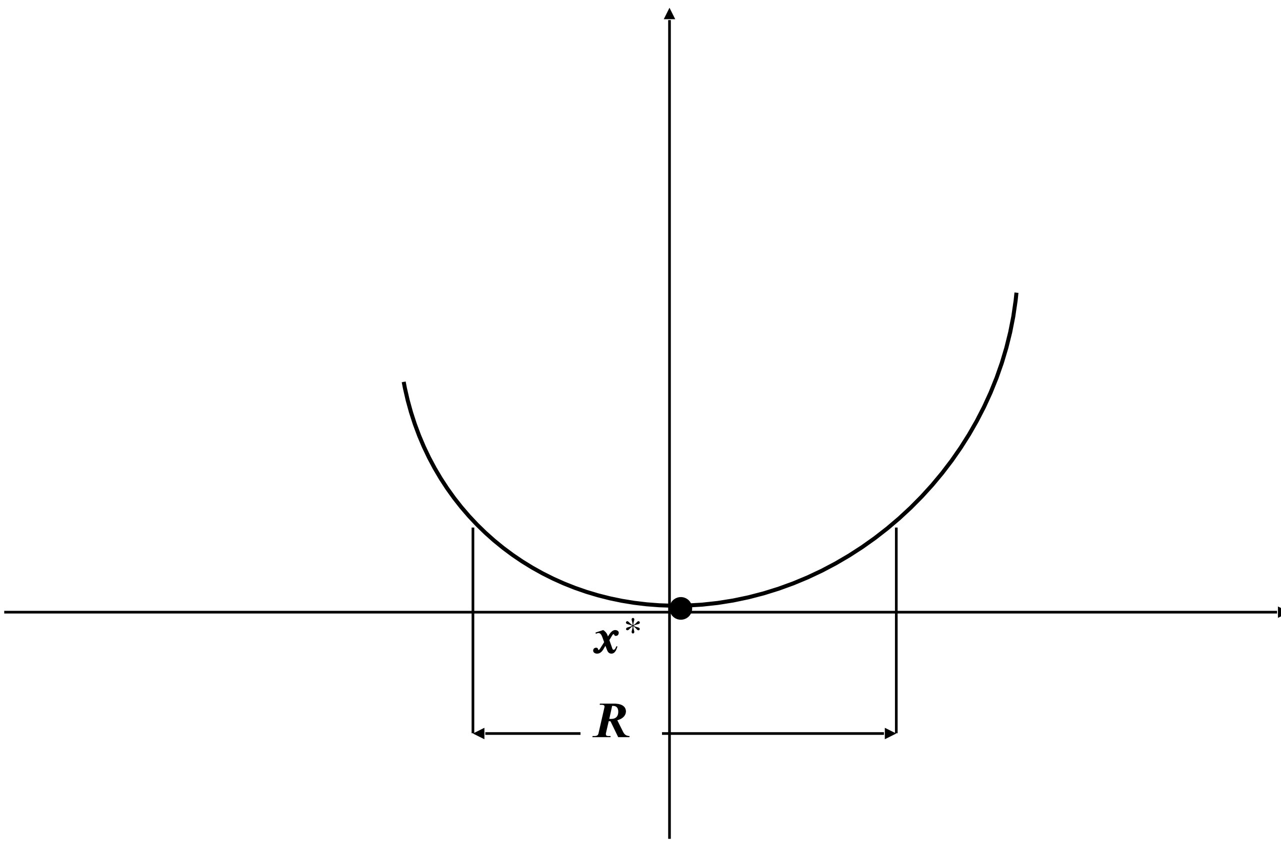
局部和全局最优



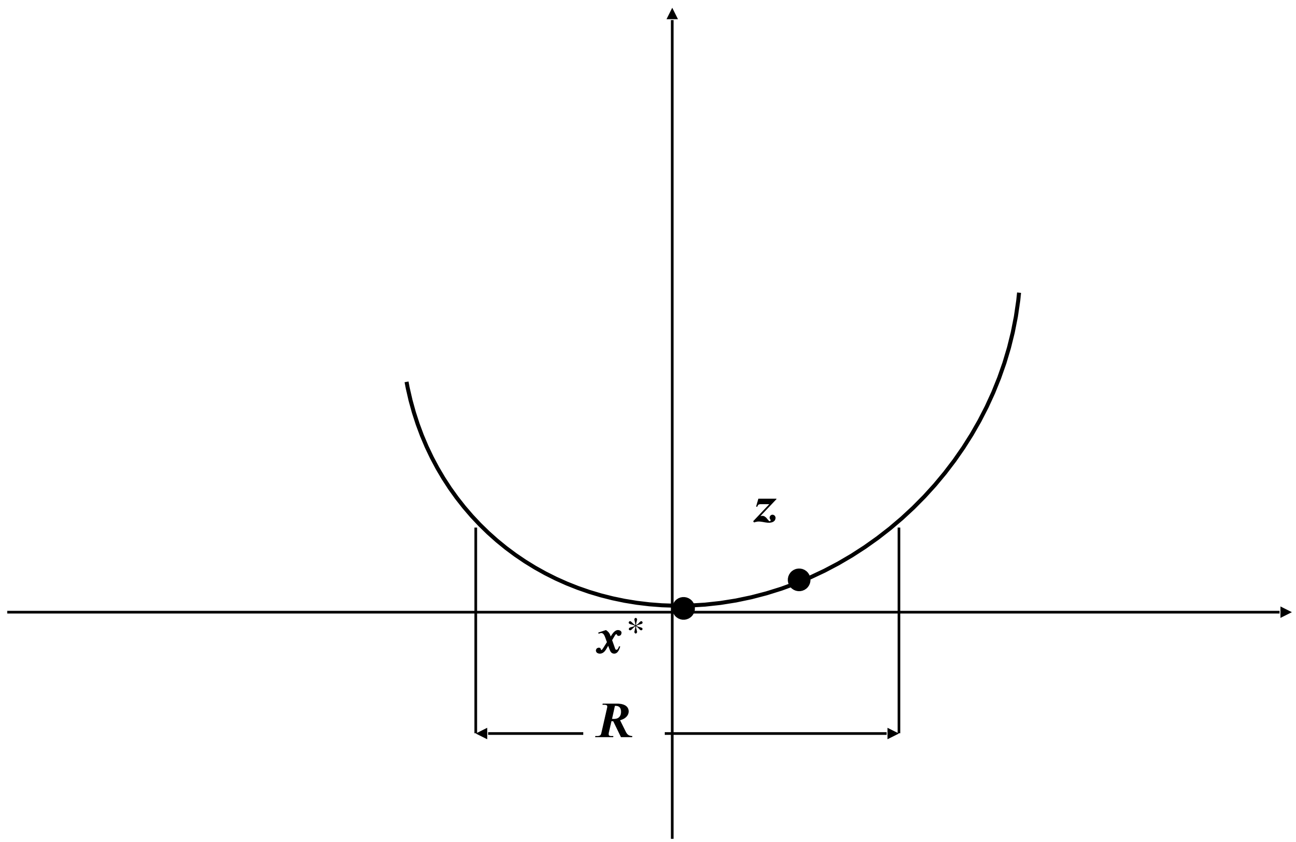
局部和全局最优



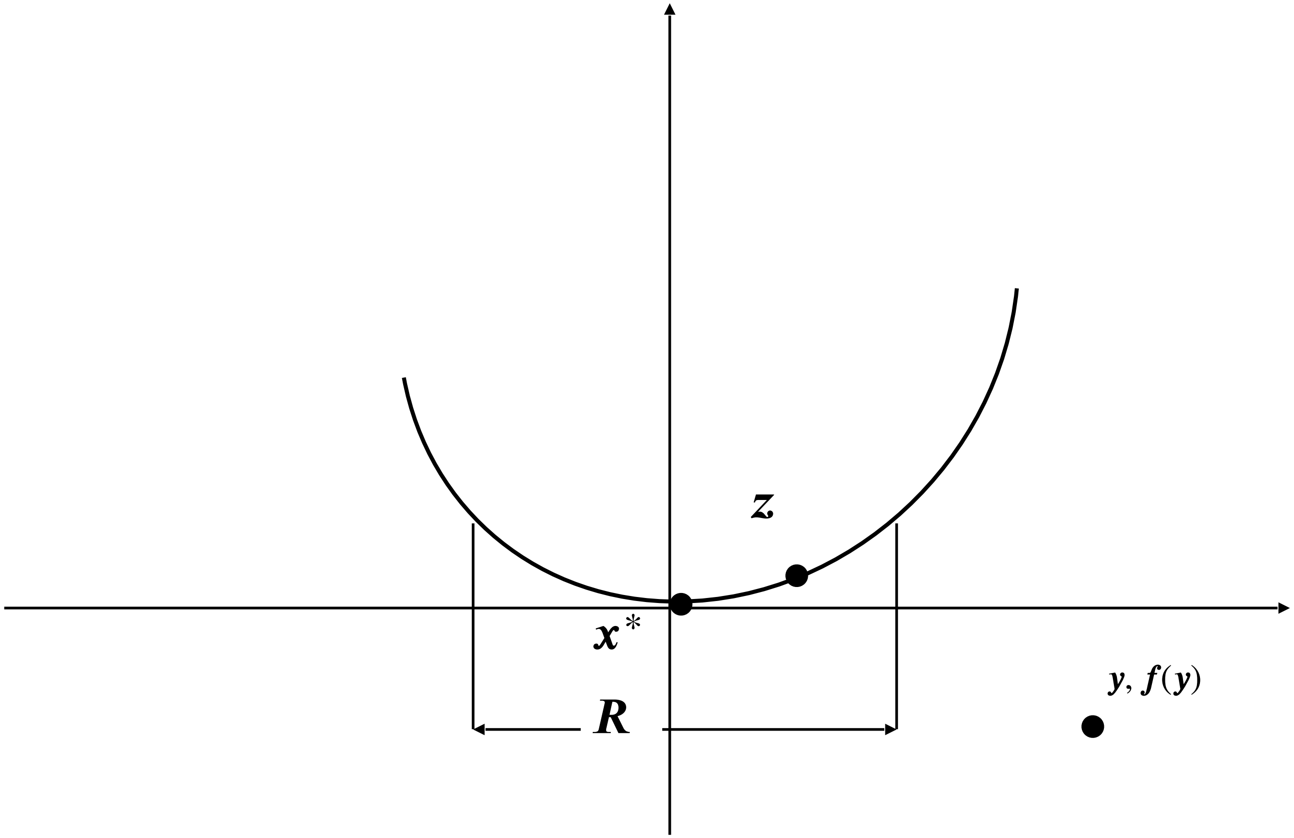
局部和全局最优



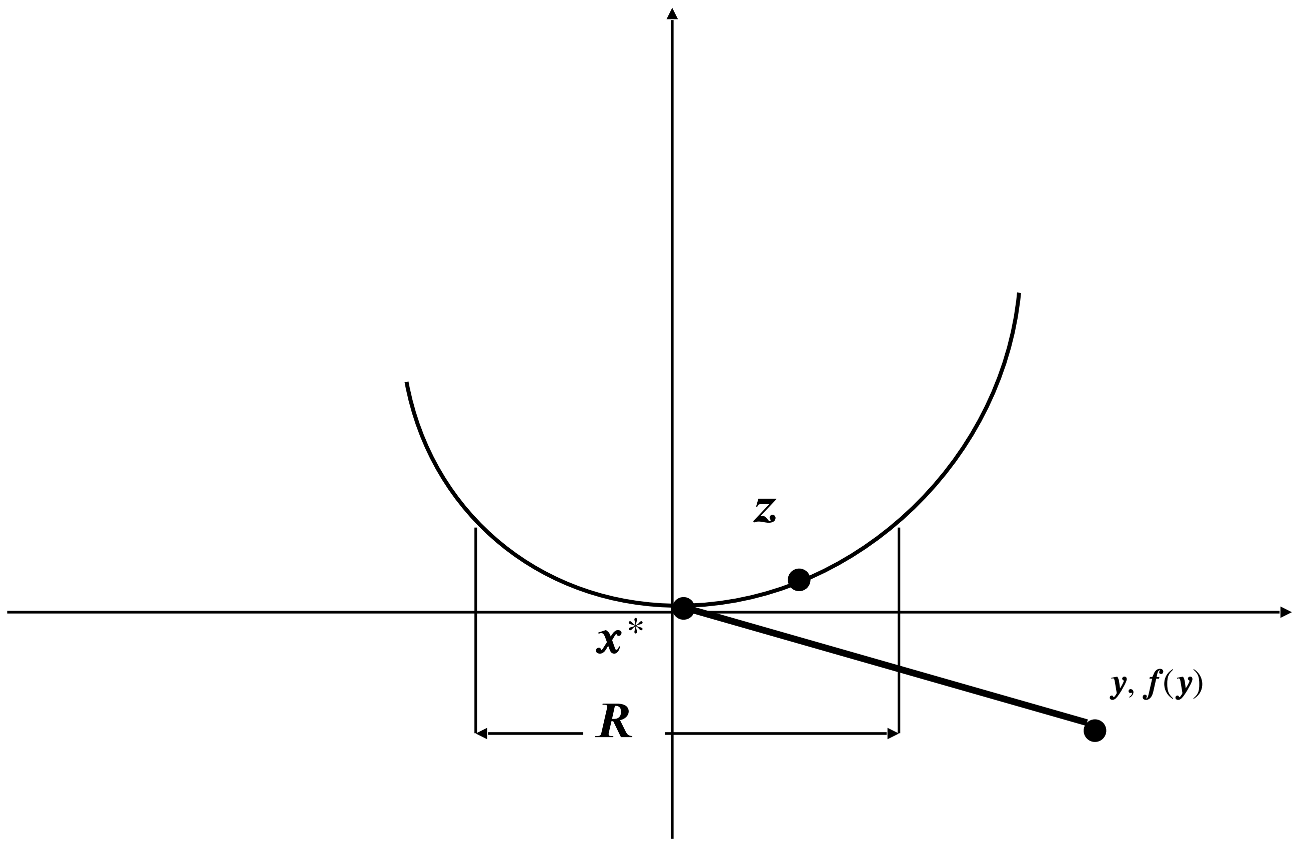
局部和全局最优



局部和全局最优



局部和全局最优



可微函数的最优性准则

可微函数的最优性准则

- x为最优解，当且仅当x是可行的，且

可微函数的最优性准则

- x为最优解，当且仅当x是可行的，且

$$\nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0 \quad \text{for all feasible } y$$

可微函数的最优性准则

- x为最优解，当且仅当x是可行的，且

$$\nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0 \quad \text{for all feasible } y$$

- 凸函数的一阶条件

可微函数的最优性准则

- x为最优解，当且仅当x是可行的，且

$$\nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0 \quad \text{for all feasible } y$$

- 凸函数的一阶条件

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) \quad \text{for all } x, y \in \mathbf{dom}\, f$$

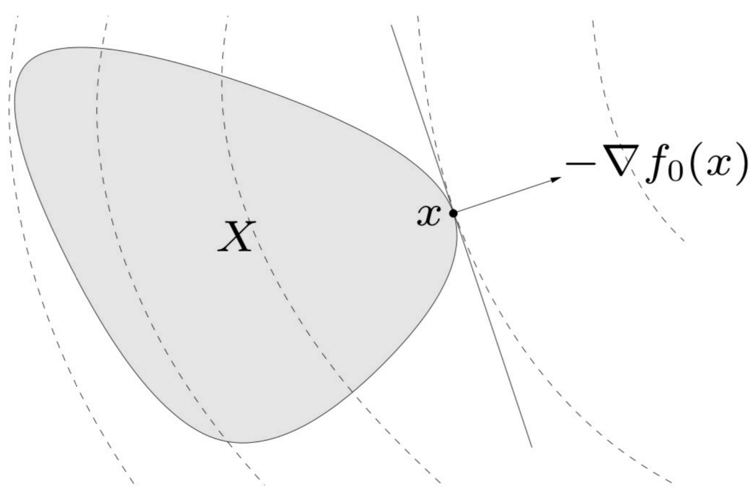
可微函数的最优性准则

- x为最优解，当且仅当x是可行的，且

$$\nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0 \quad \text{for all feasible } y$$

- 凸函数的一阶条件

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) \quad \text{for all } x, y \in \mathbf{dom}\, f$$



例

例

- 非约束问题：x为最优解，当且仅当

例

- 非约束问题：x为最优解，当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \qquad \nabla f_0(x) = 0$$

例

- 非约束问题：x为最优解，当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \qquad \nabla f_0(x) = 0$$

- 等式约束问题：

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad Ax = b$$

例

- 非约束问题：x为最优解，当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \qquad \nabla f_0(x) = 0$$

- 等式约束问题：

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad Ax = b$$

- x是最优解，则对所有 $Ay = b$，$\nabla f_0(x)^T(y - x) \geq 0$

例

- 非约束问题：x为最优解，当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \qquad \nabla f_0(x) = 0$$

- 等式约束问题：

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad Ax = b$$

- x是最优解，则对所有 $Ay = b$, $\nabla f_0(x)^T(y - x) \geq 0$

$$Ax = b \quad Ay = b$$

例

- 非约束问题：x为最优解，当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \qquad \nabla f_0(x) = 0$$

- 等式约束问题：

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad Ax = b$$

- x是最优解，则对所有 $Ay = b$，$\nabla f_0(x)^T (y - x) \geq 0$

$$Ax = b \;\; Ay = b \Longrightarrow y = x + v \;\; v \in \mathcal{N}(A)$$

例

- 非约束问题：x为最优解，当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \qquad \nabla f_0(x) = 0$$

- 等式约束问题：

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad Ax = b$$

- x是最优解，则对所有 $Ay = b$，$\nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0$

$$Ax = b \;\; Ay = b \Longrightarrow y = x + v \;\; v \in \mathcal{N}(A)$$

$$\nabla f_0(x)^T v \geq 0 \text{ for all } v \in \mathcal{N}(A)$$

例

- 非约束问题：x为最优解，当且仅当

$$x \in \textbf{dom}\, f_0, \qquad \nabla f_0(x) = 0$$

- 等式约束问题：

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad Ax = b$$

- x是最优解，则对所有 $Ay = b$，$\nabla f_0(x)^T(y - x) \geq 0$

$$Ax = b \;\; Ay = b \;\Longrightarrow\; y = x + v \;\; v \in \mathcal{N}(A)$$

$$\nabla f_0(x)^T v \geq 0 \text{ for all } v \in \mathcal{N}(A)$$

$$\nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A)$$

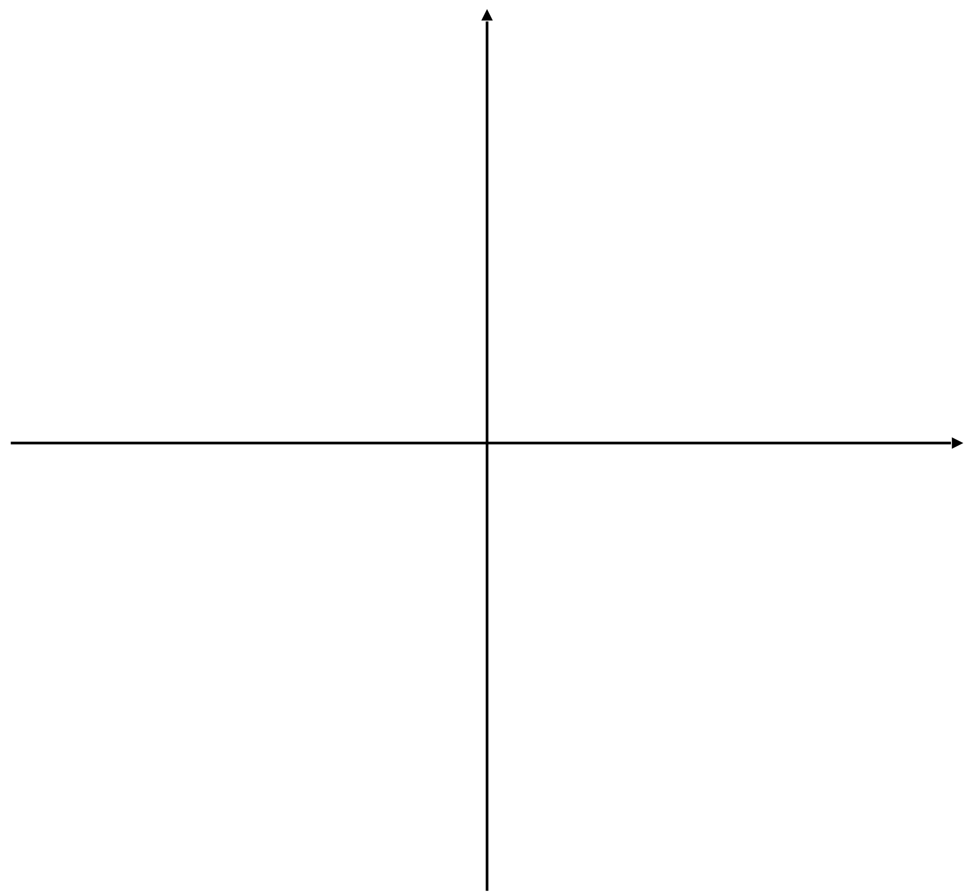
例

例

$$\nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A)$$

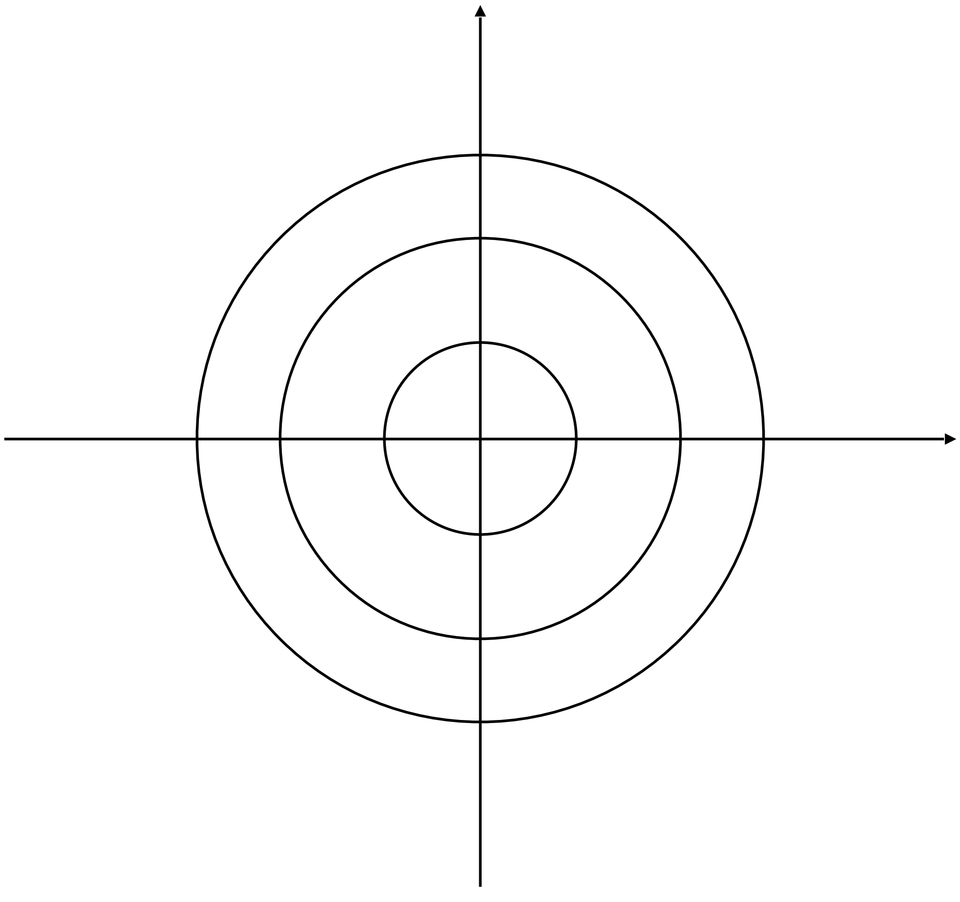
例

$$\nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A)$$



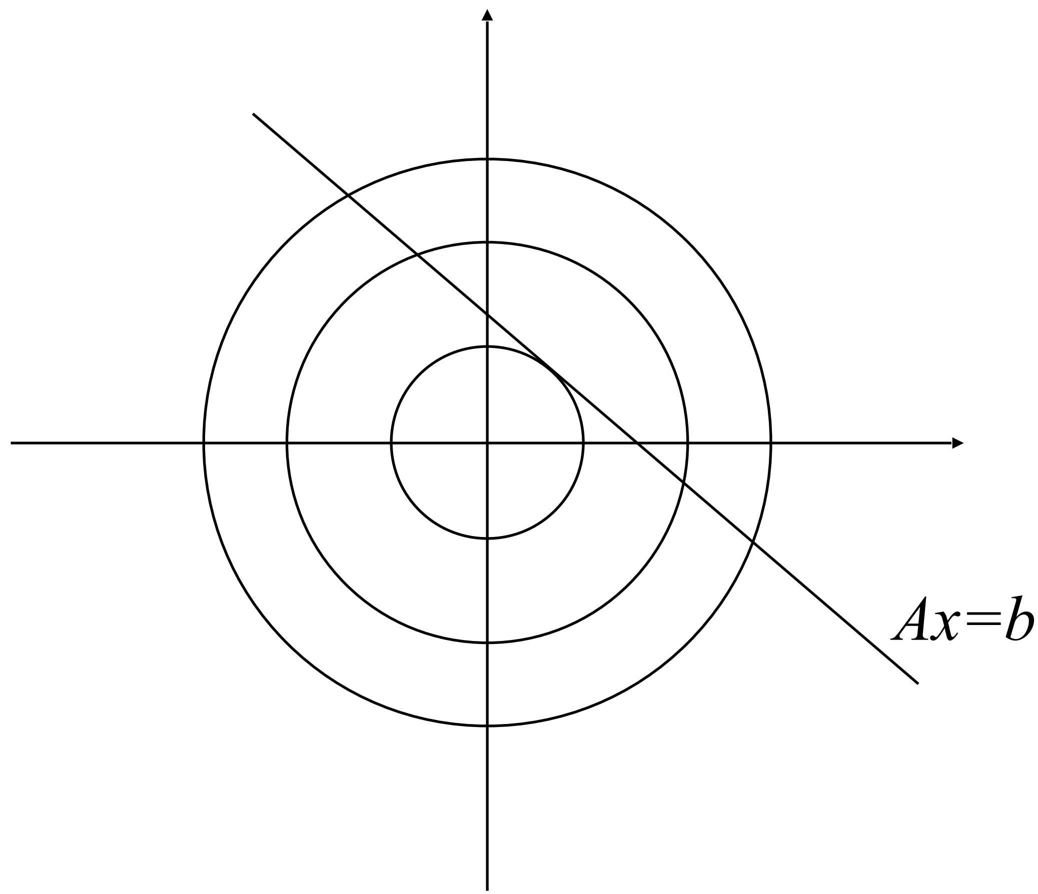
例

$\nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A)$



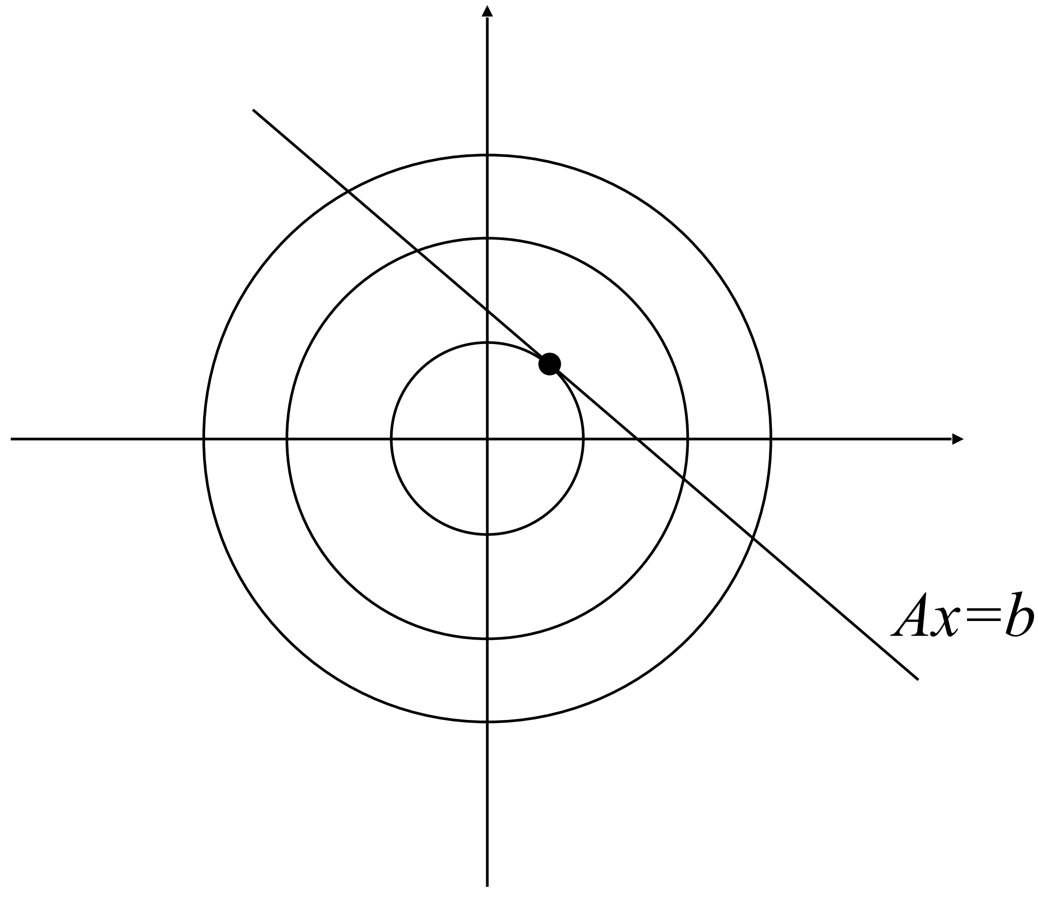
例

$\nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A)$



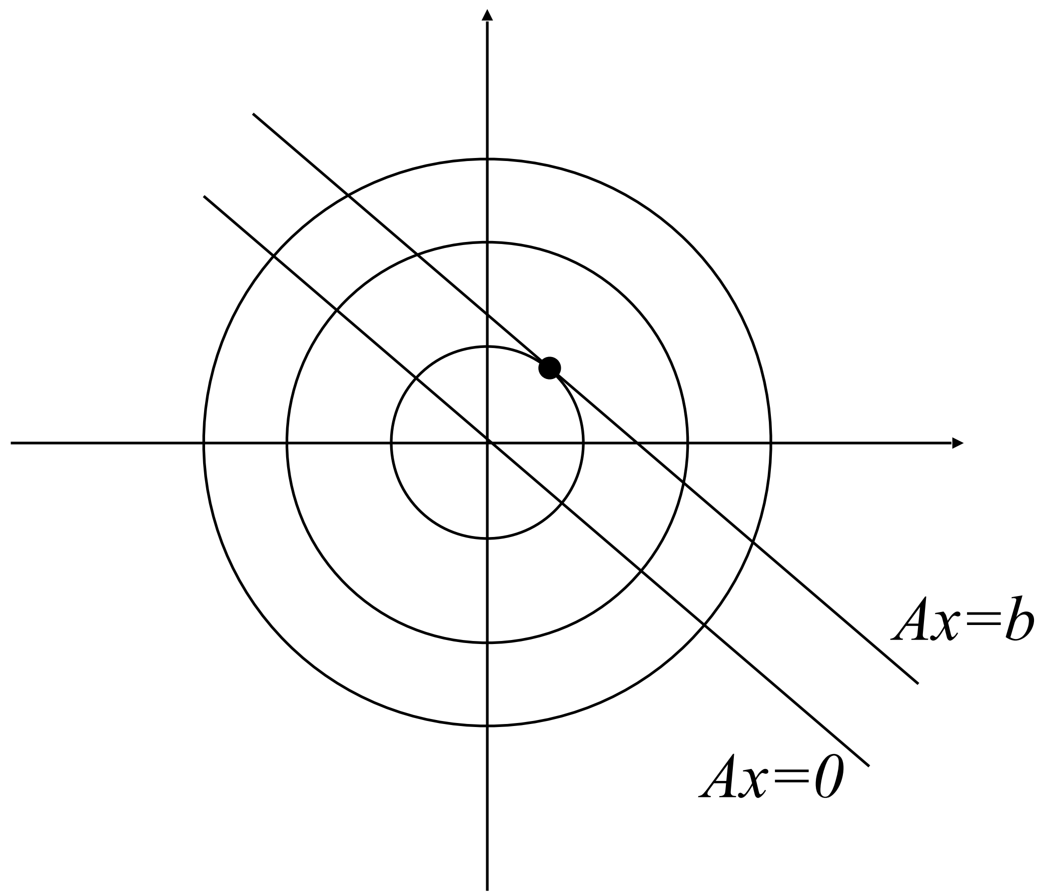
例

$$\nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A)$$



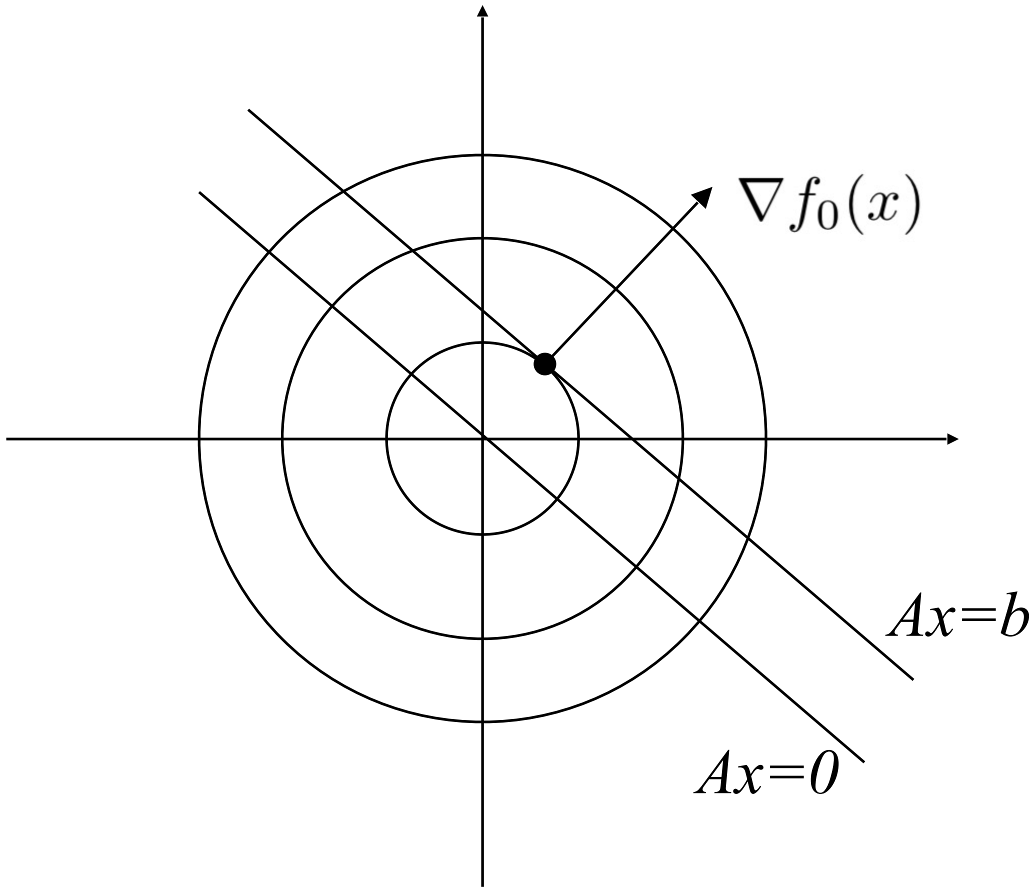
例

$\nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A)$



例

$$\nabla f_0(x) \perp \mathcal{N}(A)$$



例子

例子

- 非负象限中的极小化

例子

- 非负象限中的极小化

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \succeq 0$$

例子

- 非负象限中的极小化

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \succeq 0$$

- x是最优解，当且仅当所有$y \geq 0, \nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0$

例子

- 非负象限中的极小化

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \succeq 0$$

- x是最优解，当且仅当所有$y \geq 0, \nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0$
  - 若$\nabla f_0(x) \preceq 0$，则$\nabla f_0(x)^T y$必可取无穷小

例子

- 非负象限中的极小化

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \succeq 0$$

- x是最优解，当且仅当所有$y \geq 0, \nabla f_0(x)^T (y - x) \geq 0$
  - 若$\nabla f_0(x) \leq 0$，则$\nabla f_0(x)^T y$必可取无穷小
  - 则$\nabla f_0(x) \geq 0$

例子

- 非负象限中的极小化

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \succeq 0$$

- x是最优解，当且仅当所有$y \geq 0, \nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0$
  - 若$\nabla f_0(x) \leq 0$，则$\nabla f_0(x)^T y$必可取无穷小
  - 则$\nabla f_0(x) \geq 0$
  - 令$y=0$，则$-\nabla f_0(x)^T x \geq 0$

例子

- 非负象限中的极小化

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \succeq 0$$

- x是最优解，当且仅当所有$y \geq 0, \nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0$
  - 若$\nabla f_0(x) \leq 0$，则$\nabla f_0(x)^T y$必可取无穷小
  - 则$\nabla f_0(x) \geq 0$
  - 令$y=0$，则$-\nabla f_0(x)^T x \geq 0$
  - $\nabla f_0(x) \geq 0$，$x \geq 0$，则$\nabla f_0(x)^T x \geq 0$

例子

- 非负象限中的极小化

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \succeq 0$$

- x是最优解，当且仅当所有$y \geq 0, \nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0$
  - 若$\nabla f_0(x) \leq 0$，则$\nabla f_0(x)^T y$必可取无穷小
  - 则$\nabla f_0(x) \geq 0$
  - 令$y = 0$，则$-\nabla f_0(x)^T x \geq 0$
  - $\nabla f_0(x) \geq 0$，$x \geq 0$，则$\nabla f_0(x)^T x \geq 0$
  - 则$\nabla f_0(x)^T x = 0$

例子

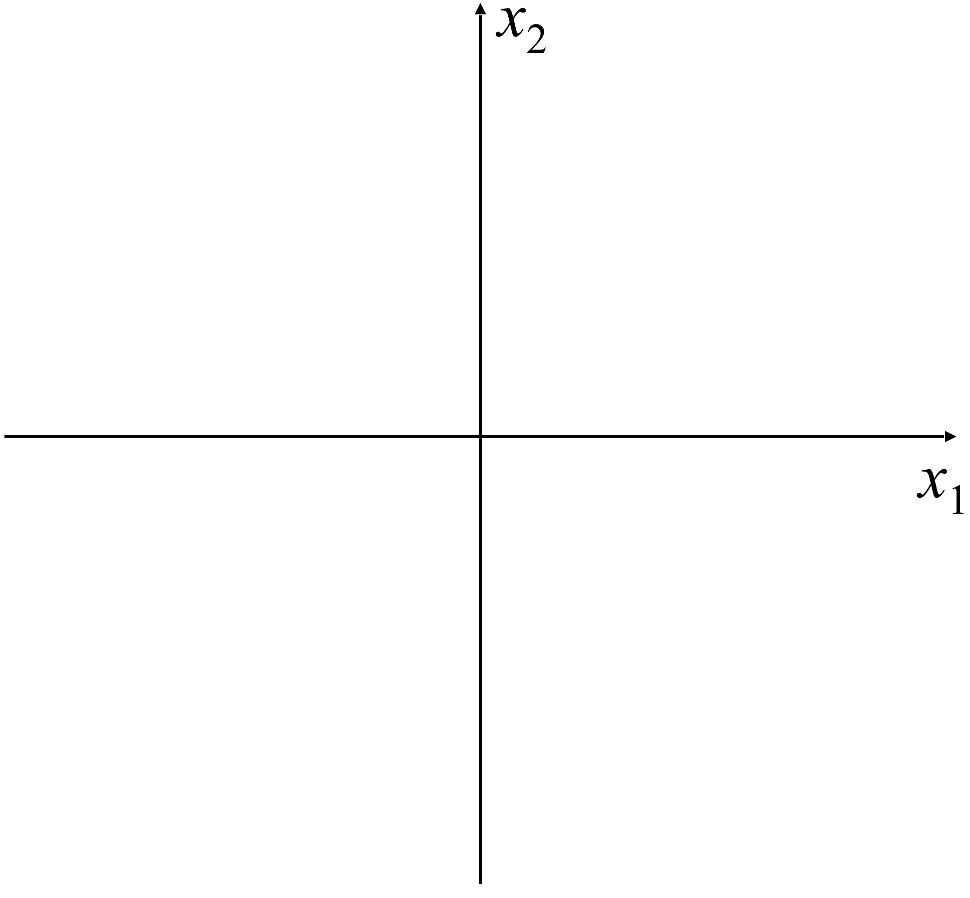
- 非负象限中的极小化

$$\text{minimize} \quad f_0(x) \quad \text{subject to} \quad x \succeq 0$$

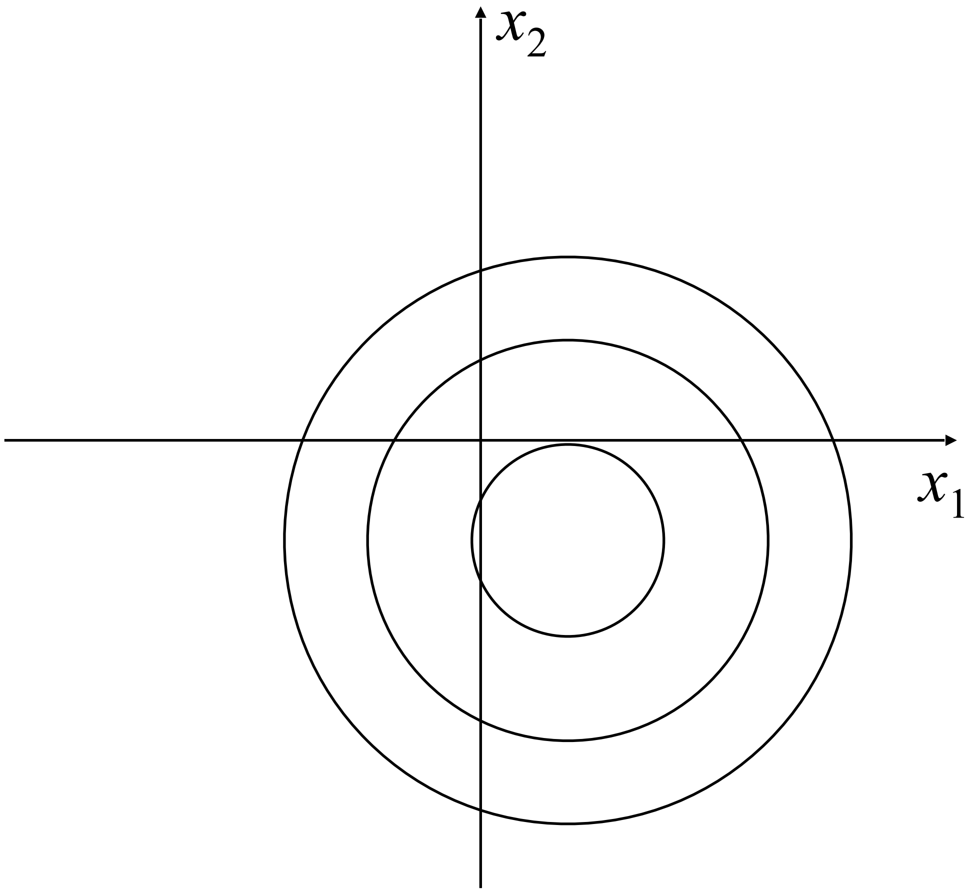
- x是最优解，当且仅当所有$y \geq 0, \nabla f_0(x)^T (y - x) \geq 0$
  - 若$\nabla f_0(x) \leq 0$，则$\nabla f_0(x)^T y$必可取无穷小
  - 则$\nabla f_0(x) \geq 0$
  - 令$y = 0$，则$-\nabla f_0(x)^T x \geq 0$
  - $\nabla f_0(x) \geq 0$，$x \geq 0$，则$\nabla f_0(x)^T x \geq 0$
  - 则$\nabla f_0(x)^T x = 0$
  - $x \geq 0$，$\nabla f_0(x) \geq 0$，$x_i(\nabla f_0(x))_i = 0, i = 1, \ldots, n$

例子

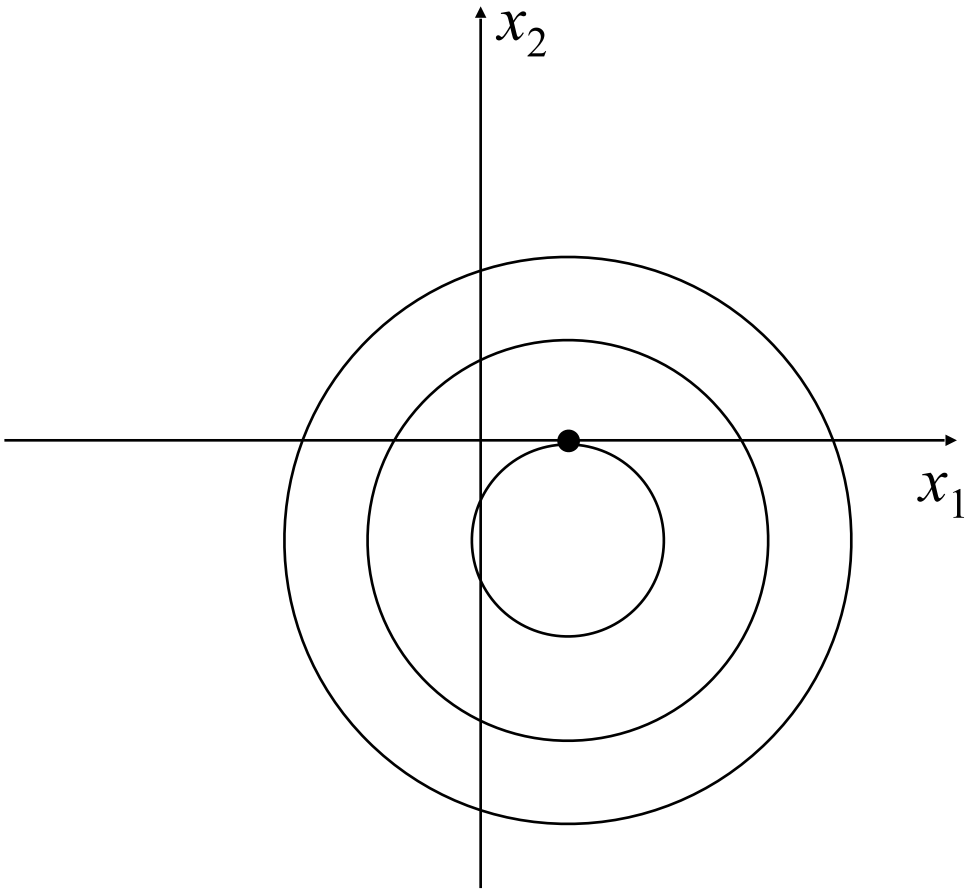
例子



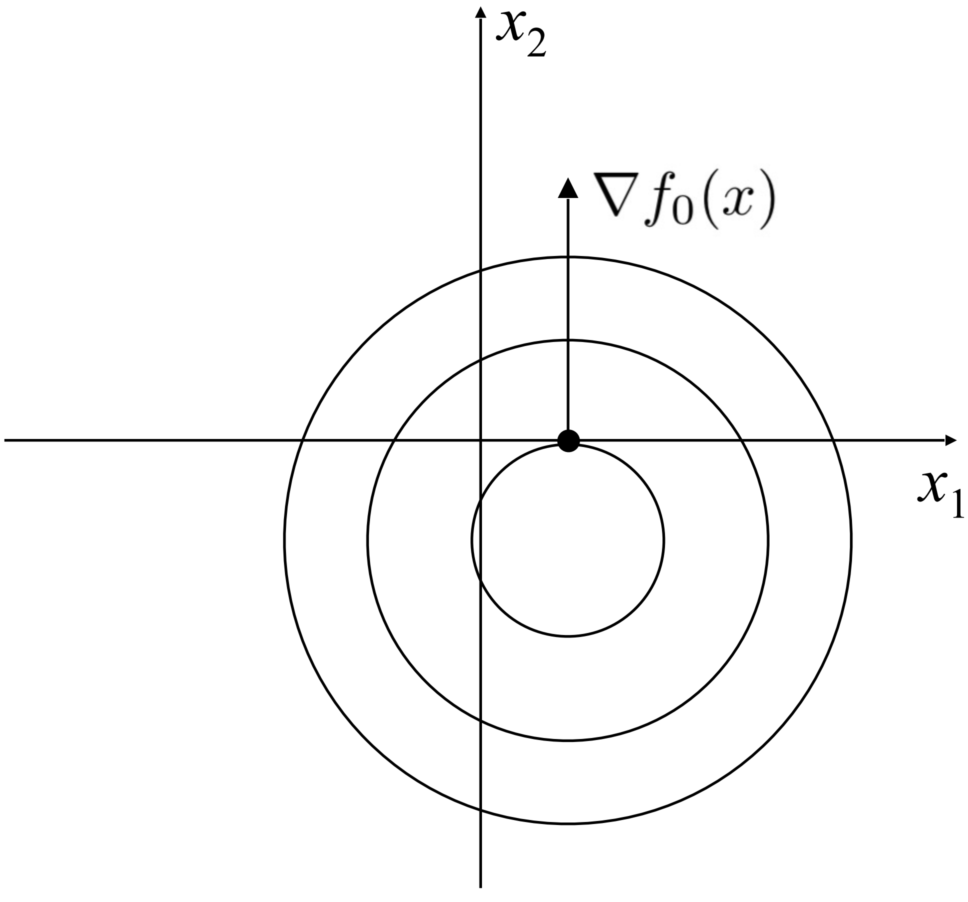
例子



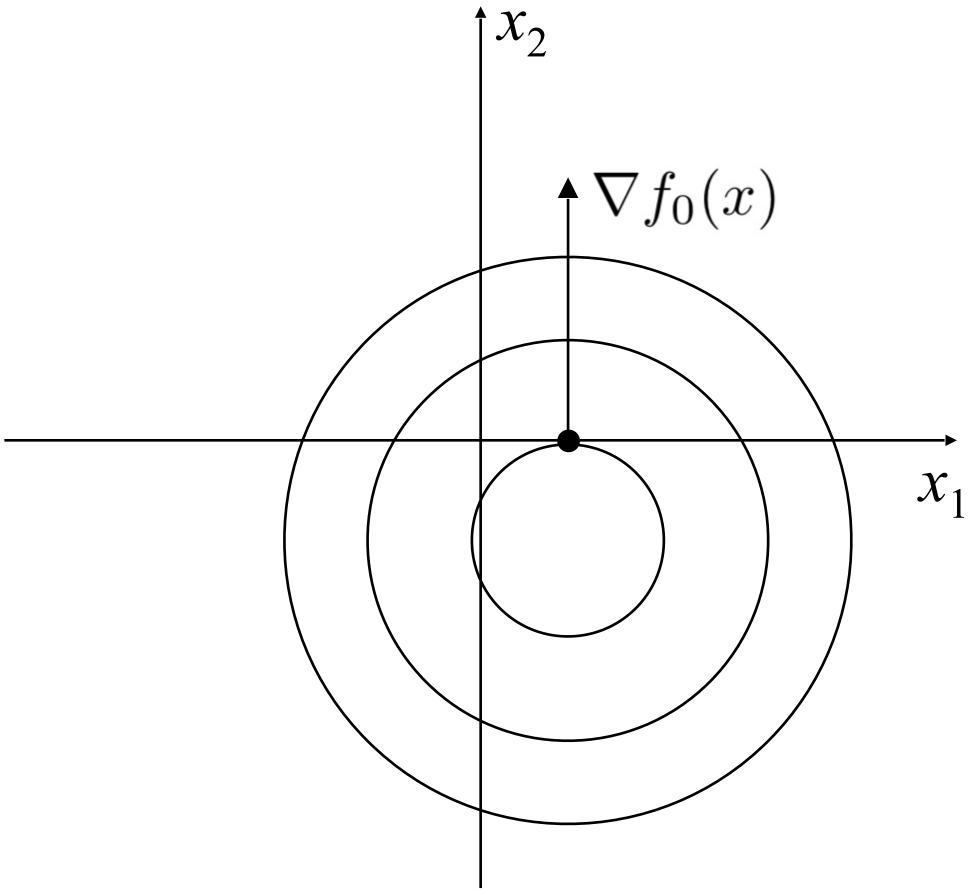
例子



例子

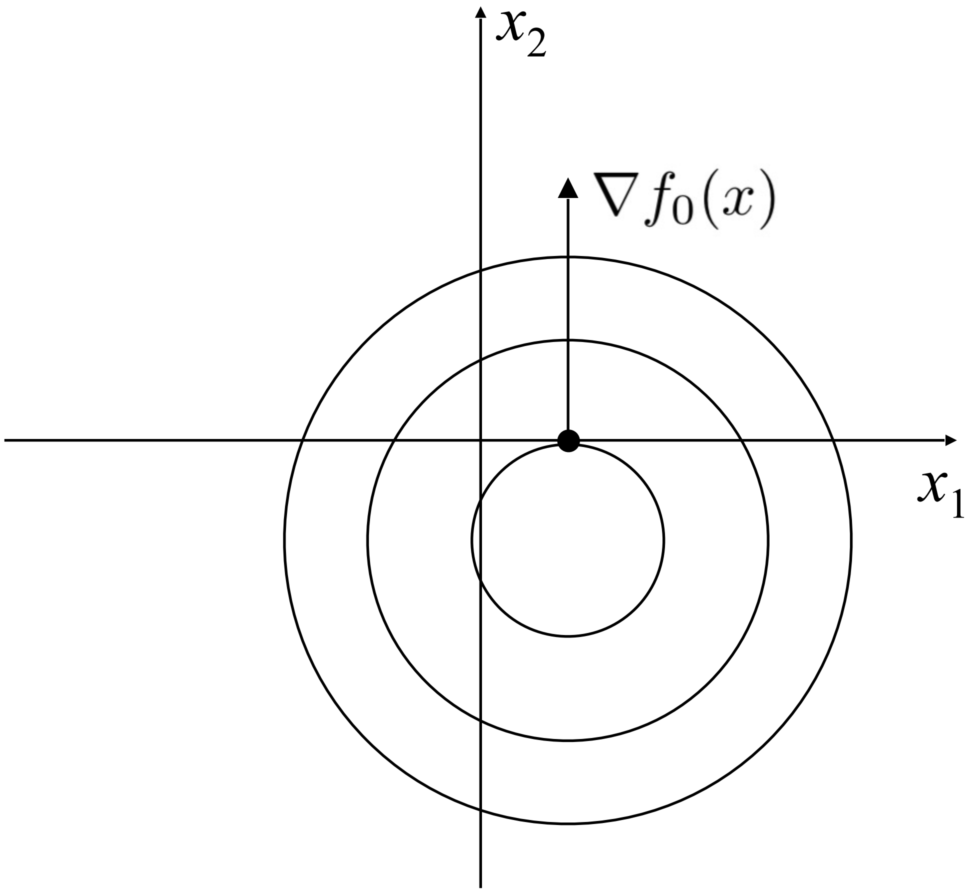


例子



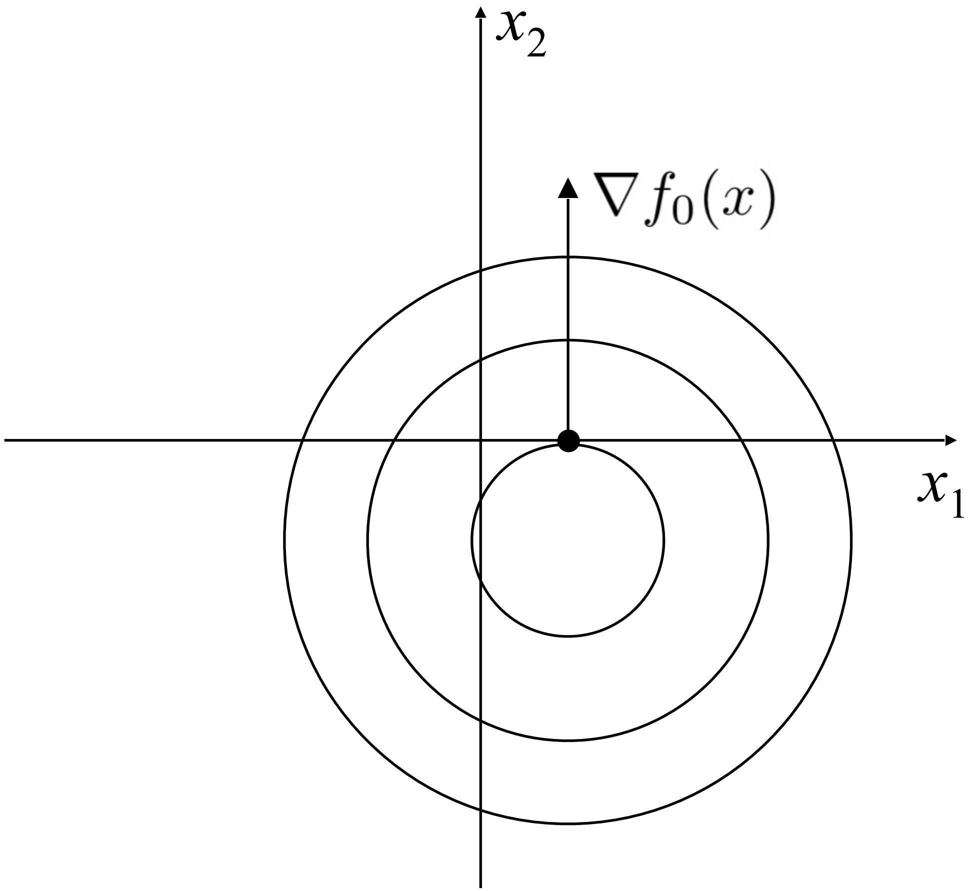
$x_1>0$

例子



$x_1 > 0$ $x_2 = 0$

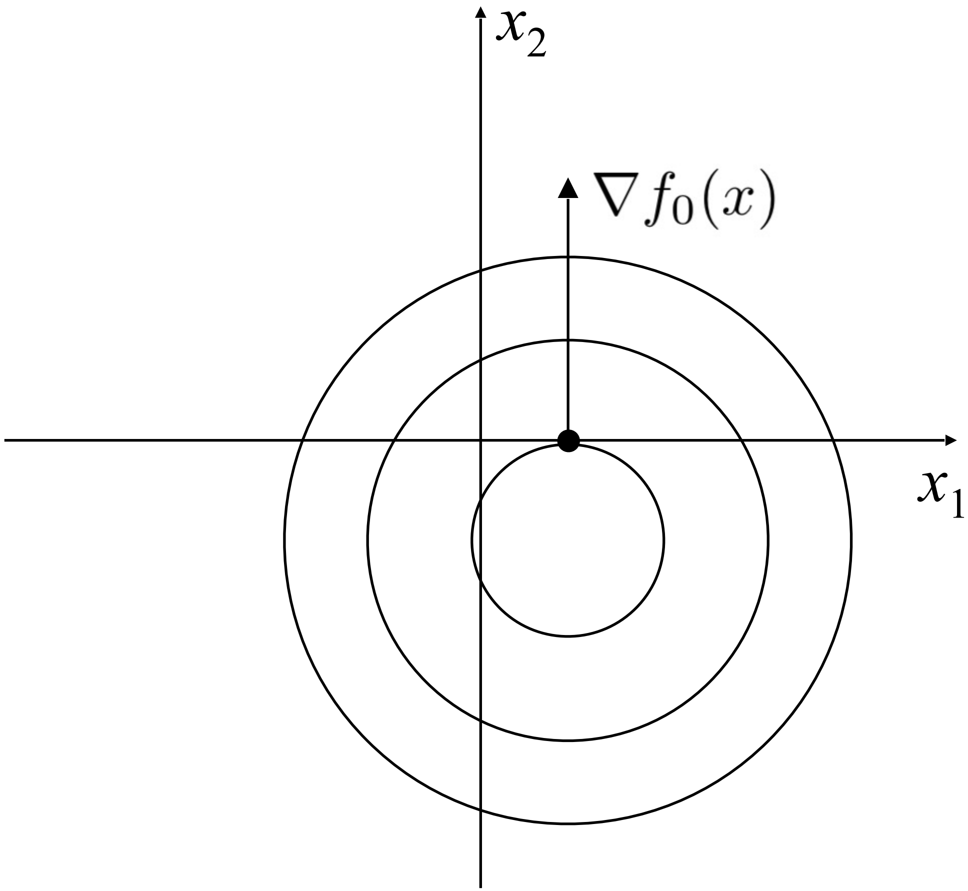
例子



$x_1 > 0$ $x_2 = 0$

$\nabla f_0(x)_1 = 0$

例子



$x_1>0$ $\quad$ $x_2=0$

$\nabla f_0(x)_1=0$ $\quad$ $\nabla f_0(x)_2>0$

线性规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x + d \\
\text{subject to} & Gx \preceq h \\
& Ax = b
\end{array}
$$

线性规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x + d \\
\text{subject to} & Gx \preceq h \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 目标函数和约束函数均为仿射函数

线性规划

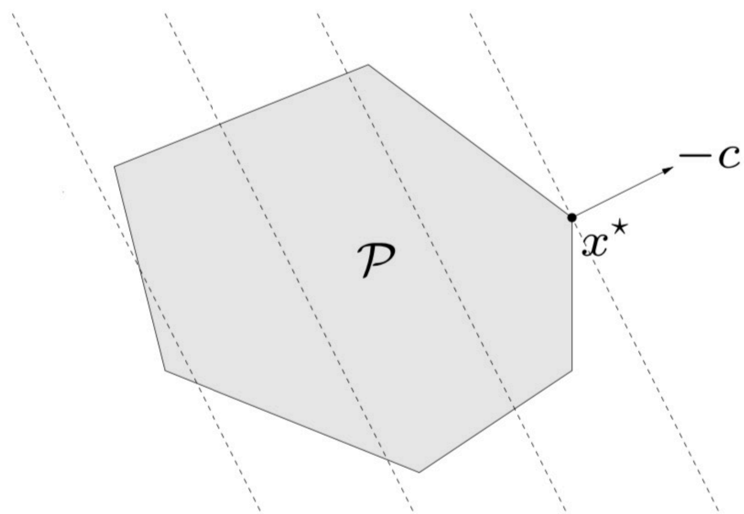
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x + d \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

- 目标函数和约束函数均为仿射函数
- 可行解为多边形

线性规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x + d \\
\text{subject to} & Gx \preceq h \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 目标函数和约束函数均为仿射函数
- 可行解为多边形



线性规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x + d \\
\text{subject to} & Gx + s = h \\
& Ax = b \\
& s \succeq 0.
\end{array}
$$

线性规划

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x + d \\ \text{subject to} & Gx + s = h \\ & Ax = b \\ & s \succeq 0.\end{array}$$

$$x = x^+ - x^-,\ x^+,\ x^- \succeq 0$$

线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x + d \\ \text{subject to} & Gx + s = h \\ & Ax = b \\ & s \succeq 0. \end{array}$$

$$x = x^+ - x^-,\ x^+,\ x^- \succeq 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x^+ - c^T x^- + d \\ \text{subject to} & Gx^+ - Gx^- + s = h \\ & Ax^+ - Ax^- = b \\ & x^+ \succeq 0, \quad x^- \succeq 0, \quad s \succeq 0, \end{array}$$

线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x + d \\ \text{subject to} & Gx + s = h \\ & Ax = b \\ & s \succeq 0. \end{array}$$

$$x = x^+ - x^-,\ x^+,\ x^- \succeq 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x^+ - c^T x^- + d \\ \text{subject to} & Gx^+ - Gx^- + s = h \\ & Ax^+ - Ax^- = b \\ & x^+ \succeq 0, \quad x^- \succeq 0, \quad s \succeq 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \succeq 0. \end{array}$$

食谱问题

食谱问题

- 为满足营养需求，营养i的量至少为b_i

食谱问题

- 为满足营养需求，营养i的量至少为b_i
- 单位第j中食品含有营养i的量为a_{ij}，价格为c_j

食谱问题

- 为满足营养需求，营养i的量至少为b_i
- 单位第j中食品含有营养i的量为a_{ij}，价格为c_j
- 从n种食物中，选择$x_1, \ldots, x_n$量的食物构成食谱

食谱问题

- 为满足营养需求，营养i的量至少为b_i
- 单位第j中食品含有营养i的量为a_{ij}，价格为c_j
- 从n种食物中，选择$x_1, \ldots, x_n$量的食物构成食谱
- 为找到最便宜的食谱，求解线性规划问题:

食谱问题

- 为满足营养需求，营养i的量至少为b_i
- 单位第j中食品含有营养i的量为a_{ij}，价格为c_j
- 从n种食物中，选择$x_1, \ldots, x_n$量的食物构成食谱
- 为找到最便宜的食谱，求解线性规划问题：

$$\text{minimize} \quad c^T x$$

食谱问题

- 为满足营养需求，营养i的量至少为b_i
- 单位第j中食品含有营养i的量为a_{ij}，价格为c_j
- 从n种食物中，选择$x_1, \ldots, x_n$量的食物构成食谱
- 为找到最便宜的食谱，求解线性规划问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \succeq b, \end{array}$$

食谱问题

- 为满足营养需求，营养i的量至少为b_i
- 单位第j中食品含有营养i的量为a_{ij}，价格为c_j
- 从n种食物中，选择$x_1, \ldots, x_n$量的食物构成食谱
- 为找到最便宜的食谱，求解线性规划问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \succeq b, \quad x \succeq 0 \end{array}$$

线性分式规划

线性分式规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & Gx \preceq h \\
& Ax = b
\end{array}
$$

线性分式规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $f_0(x) = \dfrac{c^T x + d}{e^T x + f}$, $\quad \textbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$

线性分式规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $f_0(x) = \dfrac{c^T x + d}{e^T x + f}$, $\quad \textbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$
- 为拟凸优化问题

线性分式规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $f_0(x) = \dfrac{c^T x + d}{e^T x + f}$, $\quad \mathbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$
- 为拟凸优化问题
- 等价于线性规划

线性分式规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中 $f_0(x) = \dfrac{c^T x + d}{e^T x + f}$,　　$\mathbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$
- 为拟凸优化问题
- 等价于线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T y + dz \\ \text{subject to} & Gy \preceq hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

线性分式规划

线性分式规划

- 证明:
  - 若x在原问题可行，令

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y=\dfrac{x}{e^Tx+f}$ $z=\dfrac{1}{e^Tx+f}$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y = \dfrac{x}{e^T x + f}$ $z = \dfrac{1}{e^T x + f}$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \qquad \textbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y = \dfrac{x}{e^T x + f}$ $z = \dfrac{1}{e^T x + f}$

$$Gx \preceq h$$
$$Ax = b$$
$$e^T x + f > 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \qquad \mathbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y=\dfrac{x}{e^T x+f}$ $z=\dfrac{1}{e^T x+f}$

$$
\begin{aligned}
&Gx \preceq h\\
&Ax = b\\
&e^T x + f > 0
\end{aligned}
$$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y = \dfrac{x}{e^T x + f}$ $z = \dfrac{1}{e^T x + f}$

$$
\begin{aligned}
& Gx \preceq h \\
& Ax = b \\
& e^T x + f > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T y + dz \\
\text{subject to} & Gy \preceq hz \\
& Ay = bz \\
& e^T y + fz = 1 \\
& z \geq 0
\end{array}
$$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y = \dfrac{x}{e^T x + f}$ $z = \dfrac{1}{e^T x + f}$

$$
\begin{aligned}
&Gx \preceq h \\
&Ax = b \\
&e^T x + f > 0
\end{aligned}
$$

$$Gy - hz = \frac{Gx - h}{e^T x + f} \le 0$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T y + dz \\
\text{subject to} & Gy \preceq hz \\
& Ay = bz \\
& e^T y + fz = 1 \\
& z \geq 0
\end{array}
$$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y=\dfrac{x}{e^Tx+f}$ $z=\dfrac{1}{e^Tx+f}$

$$
\begin{aligned}
&Gx \preceq h\\
&Ax = b\\
&e^Tx+f>0
\end{aligned}
$$

$$Gy-hz=\frac{Gx-h}{e^Tx+f}\le 0$$

$$Ay-bz=\frac{Ax-b}{e^Tx+f}=0$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^Ty+dz\\
\text{subject to} & Gy \preceq hz\\
& Ay = bz\\
& e^Ty+fz=1\\
& z \ge 0
\end{array}
$$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y=\dfrac{x}{e^Tx+f}$ $z=\dfrac{1}{e^Tx+f}$

$$
\begin{aligned}
&Gx \preceq h\\
&Ax = b\\
&e^Tx+f>0
\end{aligned}
$$

$$Gy-hz=\frac{Gx-h}{e^Tx+f}\le 0$$

$$Ay-bz=\frac{Ax-b}{e^Tx+f}=0$$

$$e^Ty+fz=\frac{e^Tx+f}{e^Tx+f}=1$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^Ty+dz\\
\text{subject to} & Gy\preceq hz\\
& Ay=bz\\
& e^Ty+fz=1\\
& z\ge 0
\end{array}
$$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y = \dfrac{x}{e^T x + f}$ $z = \dfrac{1}{e^T x + f}$

$$Gx \preceq h$$
$$Ax = b$$
$$e^T x + f > 0$$

$$Gy - hz = \frac{Gx - h}{e^T x + f} \le 0$$
$$Ay - bz = \frac{Ax - b}{e^T x + f} = 0$$
$$e^T y + fz = \frac{e^T x + f}{e^T x + f} = 1$$
$$z \ge 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T y + dz \\ \text{subject to} & Gy \preceq hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \ge 0 \end{array}$$

线性分式规划

- 证明：
  - 若x在原问题可行，令 $y = \dfrac{x}{e^T x + f}$ $z = \dfrac{1}{e^T x + f}$

$$Gx \preceq h$$
$$Ax = b$$
$$e^T x + f > 0$$

$$Gy - hz = \frac{Gx - h}{e^T x + f} \leq 0$$

$$Ay - bz = \frac{Ax - b}{e^T x + f} = 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T y + dz \\ \text{subject to} & Gy \preceq hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

$$e^T y + fz = \frac{e^T x + f}{e^T x + f} = 1$$

$$z \geq 0$$

$$c^T y + dz = \frac{c^T x + d}{e^T x + f} = f_0(x)$$

线性分式规划

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T y + dz \\
\text{subject to} & Gy \preceq hz \\
& Ay = bz \\
& e^T y + fz = 1 \\
& z \geq 0
\end{array}
$$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解
  - $Gy \leq 0$，$Ay=0$，$e^T y=1$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T y + dz \\
\text{subject to} & Gy \preceq hz \\
 & Ay = bz \\
 & e^T y + fz = 1 \\
 & z \geq 0
\end{array}
$$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解
  - $Gy \leq 0$，$Ay=0$，$e^T y=1$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z>0$，令$x=y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z=0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty\,(t\geq 0)$也为可行解
  - $Gy\leq 0$，$Ay=0$，$e^Ty=1$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

$$f_0(x) = \frac{c^Tx+d}{e^Tx+f}, \qquad \textbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^Tx+f>0\}$$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty (t \geq 0)$也为可行解
  - $Gy \leq 0$，$Ay=0$，$e^T y=1$
    - $Gx=Gx_0+tGy \leq h$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & Gx \preceq h \\
& Ax = b
\end{array}
$$

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \qquad \mathbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解
  - $Gy \leq 0$，$Ay=0$，$e^T y=1$
    - $Gx=Gx_0+tGy \leq h$
    - $Ax=Ax_0+tAy=b$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \qquad \mathbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解
  - $Gy \leq 0$，$Ay=0$，$e^T y=1$
    - $Gx=Gx_0+tGy \leq h$
    - $Ax=Ax_0+tAy=b$
    - $e^T x+f=e^T x_0+f+te^T y>0$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & Gx \preceq h \\
& Ax = b
\end{array}
$$

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \qquad \textbf{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解
  - $Gy \leq 0$，$Ay=0$，$e^T y=1$
    - $Gx=Gx_0+tGy \leq h$
    - $Ax=Ax_0+tAy=b$
    - $e^T x+f=e^T x_0+f+te^T y>0$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解
  - $Gy \leq 0$，$Ay=0$，$e^Ty=1$
    - $Gx=Gx_0+tGy \leq h$
    - $Ax=Ax_0+tAy=b$
    - $e^Tx+f=e^Tx_0+f+te^Ty>0$
  - $f_0(x)=f_0(x_0+ty)=\dfrac{c^T x_0 + c^T ty + d}{e^t x_0 + e^T ty + f}$

线性分式规划

- 若y，z在变换后的问题可行
- $z > 0$，令$x = y/z$
  - 则x在原问题可行，且两问题目标函数值相同
- $z = 0$，设x_0为原问题的可行解
  - $x=x_0+ty(t \geq 0)$也为可行解
  - $Gy \leq 0$，$Ay=0$，$e^T y=1$
    - $Gx=Gx_0+tGy \leq h$
    - $Ax=Ax_0+tAy=b$
    - $e^T x+f=e^T x_0+f+te^T y>0$
  - $f_0(x)=f_0(x_0+ty)=\dfrac{c^T x_0 + c^T ty + d}{e^t x_0 + e^T ty + f}$ $\quad \lim\limits_{t \to \infty} f_0(x) = c^T y$

二次规划(QP)

二次规划(QP)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\
\text{subject to} & Gx \preceq h \\
& Ax = b
\end{array}
$$

二次规划(QP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (1/2)x^T P x + q^T x + r \qquad P \in \mathbf{S}_+^n, \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

二次规划(QP)

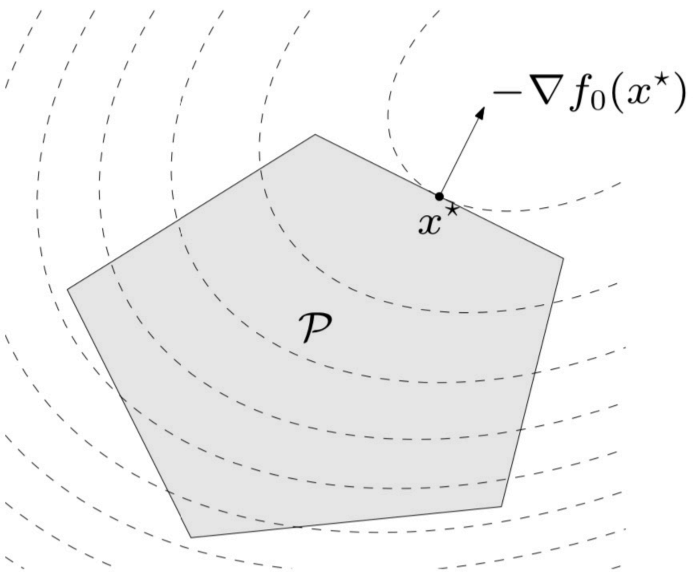
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (1/2)x^T P x + q^T x + r \qquad P \in \mathbf{S}_+^n, \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

- 在多面体上极小化一个凸二次函数

二次规划(QP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (1/2)x^T P x + q^T x + r \qquad P \in \mathbf{S}_+^n, \\ \text{subject to} & Gx \preceq h \\ & Ax = b \end{array}$$

- 在多面体上极小化一个凸二次函数



二次约束二次规划(QCQP)

二次约束二次规划(QCQP)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (1/2)x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\
\text{subject to} & (1/2)x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

二次约束二次规划(QCQP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (1/2)x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \qquad P_i \in \mathbf{S}_+^n \\ \text{subject to} & (1/2)x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}$$

二次约束二次规划(QCQP)

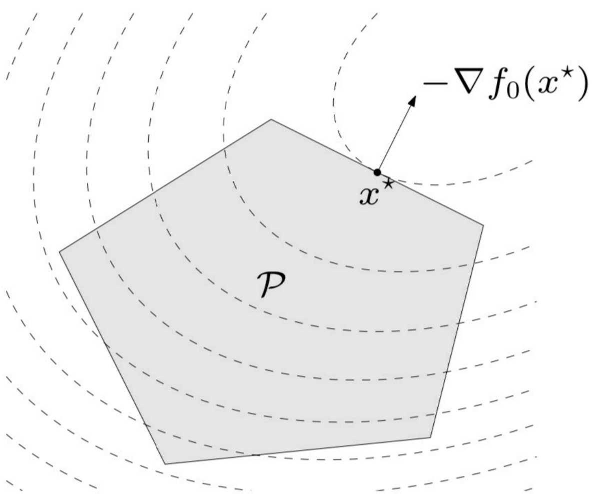
$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (1/2)x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \qquad P_i \in \mathbf{S}_+^n \\
\text{subject to} & (1/2)x^T P_i x + q_i^T x + r_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 若 $P_1, \ldots, P_m \in \mathbf{S}_{++}^n$，可行区域为$m$个椭球和一个仿射集合的交集

二次约束二次规划(QCQP)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (1/2)x^TP_0x + q_0^Tx + r_0 \qquad P_i \in \mathbf{S}_+^n \\
\text{subject to} & (1/2)x^TP_ix + q_i^Tx + r_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

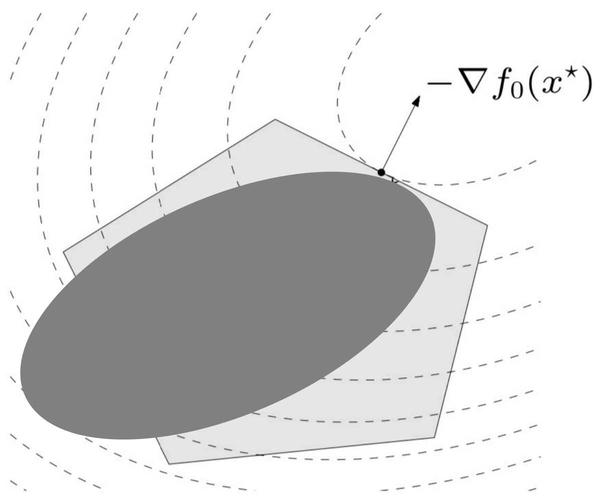
- 若 $P_1, \ldots, P_m \in \mathbf{S}_{++}^n$，可行区域为*m*个椭球和一个仿射集合的交集



二次约束二次规划(QCQP)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & (1/2)x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \qquad P_i \in \mathbf{S}_+^n \\
\text{subject to} & (1/2)x^T P_i x + q_i^T x + r_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 若 $P_1, \ldots, P_m \in \mathbf{S}_{++}^n$，可行区域为$m$个椭球和一个仿射集合的交集



例

例

- 带噪音的测量系统

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + e$

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + e$
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2$

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + e$
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2$
  - $\quad = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2$

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + e$
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2$
  - $\quad = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2$
  - $\quad = \arg\min_x x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b$

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + e$
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2$
  - $= \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2$
  - $= \arg\min_x x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b$
  - $= (A^T A)^{-1} A^T b$

例

例

- 带噪音的测量系统

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + b$，且x稀疏

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + b$，且x稀疏
  - $x^* = \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_0 \|x\|_0$

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + b$，且x稀疏
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_0 \|x\|_0$
  - $\approx \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_1 \|x\|_1$

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + b$，且x稀疏
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_0 \|x\|_0$
  - $\approx \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_1 \|x\|_1$
  - L_1-规范化的最小二乘问题

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + b$，且x稀疏
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_0 \|x\|_0$
  - $\approx \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_1 \|x\|_1$
  - L_1-规范化的最小二乘问题
  - 引入$x = x^+ - x^-, x^+, x^- \geq 0$

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + b$，且x稀疏
  - $x^* = \arg\min\limits_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_0 \|x\|_0$
  - $\approx \arg\min\limits_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_1 \|x\|_1$
  - L_1-规范化的最小二乘问题
  - 引入$x = x^+ - x^-, x^+, x^- \geq 0$
  - $= \arg\min\limits_{x^+, x^-} \|b - Ax^+ + Ax^-\|_2^2 + \lambda_1 \|x^+ - x^-\|_1$

例

- 带噪音的测量系统
  - $b = Ax + b$，且x稀疏
  - $x^* = \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_0 \|x\|_0$
  - $\approx \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_1 \|x\|_1$
  - L_1-规范化的最小二乘问题
  - 引入$x = x^+ - x^-, x^+, x^- \geq 0$
  - $= \arg\min_{x^+, x^-} \|b - Ax^+ + Ax^-\|_2^2 + \lambda_1 \|x^+ - x^-\|_1$
  - $= \arg\min_{x^+, x^-} \|b - Ax^+ + Ax^-\|_2^2 + \lambda_1 1^T x^+ + \lambda_1 1^T x^-$

例

例

- L_2-规范化的最小二乘问题(岭回归)

例

- L_2-规范化的最小二乘问题(岭回归)
  - x中元素幅度类似

例

- L_2-规范化的最小二乘问题(岭回归)
  - x中元素幅度类似
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_2 \|x\|_2^2$

例

- L_2-规范化的最小二乘问题(岭回归)
  - x中元素幅度类似
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_2 \|x\|_2^2$
  - $A^T A + \lambda_2 I$半正定

例

- L_2-规范化的最小二乘问题(岭回归)
  - x中元素幅度类似
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_2 \|x\|_2^2$
  - $A^T A + \lambda_2 I$半正定
  - $\arg\min_x \|b - Ax\|_2^2$

例

- L_2-规范化的最小二乘问题(岭回归)
  - x中元素幅度类似
  - $x^* = \arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_2 \|x\|_2^2$
  - $A^T A + \lambda_2 I$半正定
  - $$\begin{aligned} &\arg\min_x \|b - Ax\|_2^2 \\ &\textbf{s.t. } \|x\|_2^2 \le \theta \end{aligned}$$

例

例

- 投资组合问题

例

- 投资组合问题

	投入	回报
1	X_1	P_1X_1
2	X_2	P_2X_2
…	…	…
N	X_n	P_nX_n

例

- 投资组合问题

	投入	回报
1	X_1	P_1X_1
2	X_2	P_2X_2
…	…	…
N	X_n	P_nX_n

$$\max P_1X_1 + \ldots + P_nX_n$$

$$\textbf{s.t}\quad X_1 + \ldots + X_n \le B$$

$$X_1, \ldots, X_n \ge 0$$

例

例

- 投资组合问题

例

- 投资组合问题
- $\bar{P} = [1.1 \quad 1.2 \quad 1.0]$

例

- 投资组合问题
- $\bar{P} = [1.1 \quad 1.2 \quad 1.0]$
- $$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

例

- 投资组合问题
- $\bar{P} = [1.1 \quad 1.2 \quad 1.0]$
- $$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & X^T \Sigma X \\ s.t. \quad & \bar{P}^T X \geq r_{min} \\ & 1^T X = B \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

广义不等式约束

广义不等式约束

- 广义不等式约束下的凸优化问题

广义不等式约束

- 广义不等式约束下的凸优化问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

广义不等式约束

- 广义不等式约束下的凸优化问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为凸函数; $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k_i}$ 为K_i-凸函数

广义不等式约束

- 广义不等式约束下的凸优化问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为凸函数；$f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k_i}$ 为K_i-凸函数
- 具有标准凸优化问题的性质(凸可行集，局部最优为全局最优，等)

广义不等式约束

- 广义不等式约束下的凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i=1,\ldots,m \\ & Ax = b \end{array}$$

- 函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为凸函数；$f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k_i}$ 为K_i-凸函数
- 具有标准凸优化问题的性质(凸可行集，局部最优为全局最优，等)
- 锥形式问题：目标和约束函数为仿射函数的特殊形式

广义不等式约束

- 广义不等式约束下的凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i=1,\ldots,m \\ & Ax=b \end{array}$$

- 函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为凸函数；$f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k_i}$ 为K_i-凸函数
- 具有标准凸优化问题的性质(凸可行集，局部最优为全局最优，等)
- 锥形式问题：目标和约束函数为仿射函数的特殊形式

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Fx+g \preceq_K 0 \\ & Ax=b \end{array}$$

广义不等式约束

- 广义不等式约束下的凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i=1,\ldots,m \\ & Ax=b \end{array}$$

- 函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为凸函数；$f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k_i}$ 为K_i-凸函数
- 具有标准凸优化问题的性质(凸可行集，局部最优为全局最优，等)
- 锥形式问题：目标和约束函数为仿射函数的特殊形式

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Fx+g \preceq_K 0 \\ & Ax=b \end{array}$$

  - 将线性规划扩展到非负象限锥

半定规划

半定规划

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & x_1F_1 + x_2F_2 + \cdots + x_nF_n + G \preceq 0 \\ & Ax = b\end{array}$$

半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n + G \preceq 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中，$F_i, G \in \mathbf{S}^k$

半定规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x \\
\text{subject to} & x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n + G \preceq 0 \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 其中，$F_i, G \in \mathbf{S}^k$
- 线性矩阵不等式**[linear matrix inequality (LMI)]**

半定规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x \\
\text{subject to} & x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n + G \preceq 0 \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 其中，$F_i, G \in \mathbf{S}^k$
- 线性矩阵不等式**[linear matrix inequality (LMI)]**
- 带有多个**LMI**约束的问题

半定规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^T x \\
\text{subject to} & x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n + G \preceq 0 \\
& Ax = b
\end{array}
$$

- 其中，$F_i, G \in \mathbf{S}^k$
- 线性矩阵不等式**[linear matrix inequality (LMI)]**
- 带有多个**LMI**约束的问题

$$
x_1 \hat{F}_1 + \cdots + x_n \hat{F}_n + \hat{G} \preceq 0, \qquad x_1 \tilde{F}_1 + \cdots + x_n \tilde{F}_n + \tilde{G} \preceq 0
$$

半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n + G \preceq 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中，$F_i, G \in \mathbf{S}^k$
- 线性矩阵不等式**[linear matrix inequality (LMI)]**
- 带有多个**LMI**约束的问题

$$x_1 \hat{F}_1 + \cdots + x_n \hat{F}_n + \hat{G} \preceq 0, \qquad x_1 \tilde{F}_1 + \cdots + x_n \tilde{F}_n + \tilde{G} \preceq 0$$

  - 等价于单个**LMI**

半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n + G \preceq 0 \\ & Ax = b \end{array}$$

- 其中，$F_i, G \in \mathbf{S}^k$
- 线性矩阵不等式**[linear matrix inequality (LMI)]**
- 带有多个**LMI**约束的问题

$$x_1 \hat{F}_1 + \cdots + x_n \hat{F}_n + \hat{G} \preceq 0, \qquad x_1 \tilde{F}_1 + \cdots + x_n \tilde{F}_n + \tilde{G} \preceq 0$$

  - 等价于单个**LMI**

$$x_1 \begin{bmatrix} \hat{F}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{F}_1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \hat{F}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{F}_2 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} \hat{F}_n & 0 \\ 0 & \tilde{F}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{G} & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix} \preceq 0$$

半定规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \mathbf{tr}(CX) \\
\text{subject to} & \mathbf{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \ldots, p \\
& X \succeq 0,
\end{array}
$$

半定规划

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \mathbf{tr}(CX) \\
\text{subject to} & \mathbf{tr}(A_iX) = b_i, \quad i = 1, \ldots, p \\
& X \succeq 0,
\end{array}
$$

- 例：$A(X) = A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$

半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{tr}(CX) \\ \text{subject to} & \mathbf{tr}(A_iX) = b_i, \quad i = 1, \ldots, p \\ & X \succeq 0, \end{array}$$

- 例： $A(X) = A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$
  - $A_i \in R^{p*q}, i = 0,\ldots,n, X \in R^n$

半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{tr}(CX) \\ \text{subject to} & \mathbf{tr}(A_iX) = b_i, \quad i = 1, \ldots, p \\ & X \succeq 0, \end{array}$$

- 例：$A(X) = A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$
  - $A_i \in R^{p*q}, i = 0,\ldots,n, X \in R^n$
  - 谱范数$\|A(X)\|_2 = A(X)$的最大奇异值

半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{tr}(CX) \\ \text{subject to} & \mathbf{tr}(A_iX) = b_i, \quad i = 1, \ldots, p \\ & X \succeq 0, \end{array}$$

- 例： $A(X) = A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$
  - $A_i \in R^{p*q}, i = 0,\ldots,n, X \in R^n$
  - 谱范数$\|A(X)\|_2 = A(X)$的最大奇异值
  - $\min \|A(X)\|_2$

半定规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{tr}(CX) \\ \text{subject to} & \mathbf{tr}(A_iX) = b_i, \quad i = 1, \ldots, p \\ & X \succeq 0, \end{array}$$

- 例： $A(X) = A_0 + x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$
  - $A_i \in R^{p*q}, i = 0,\ldots,n, X \in R^n$
  - 谱范数$\|A(X)\|_2 = A(X)$的最大奇异值
  - $\min \|A(X)\|_2$
  - $\|A(X)\|_2 \leq \sqrt{S} \Leftrightarrow A^T(X)A(X) - SI \leq 0$

半定规划

半定规划

- $$\min \quad \sqrt{S}$$ $$s.t.\ A^T(X)A(X) \le SI$$ 等价于$\min S$

半定规划

- $$\begin{aligned}&\min \quad \sqrt{S}\\&s.t.\ A^T(X)A(X) \le SI\end{aligned}$$ 等价于$\min S$
- 令$\sqrt{S}=t$，则等价于

半定规划

- $$\begin{aligned} &\min \quad \sqrt{S} \\ &s.t. \quad A^T(X)A(X) \le SI \end{aligned}$$ 等价于 $\min S$

- 令 $\sqrt{S} = t$，则等价于

- $$\begin{aligned} &\min \quad t \\ &s.t. \quad A^T(X)A(X) - t^2 I \le 0 \\ &\qquad\quad t \ge 0 \end{aligned}$$ 等价于

半定规划

- $$\begin{aligned} &\min \quad \sqrt{S} \\ &s.t.\ A^T(X)A(X) \le SI \end{aligned}$$ 等价于 $\min S$
- 令 $\sqrt{S} = t$，则等价于
  $$\begin{aligned} &\min \quad t \\ &s.t.\ A^T(X)A(X) - t^2 I \le 0 \\ &\qquad\quad t \ge 0 \end{aligned}$$
  等价于
- $$\begin{aligned} &\min \quad t \\ &s.t.\ \begin{bmatrix} tI & A(X) \\ A^T(X) & tI \end{bmatrix} \ge 0 \end{aligned}$$

二阶锥优化

二阶锥优化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f^T x \qquad (A_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n},\ F \in \mathbf{R}^{p \times n}) \\ \text{subject to} & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Fx = g \end{array}$$

二阶锥优化

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f^T x & (A_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n},\ F \in \mathbf{R}^{p \times n}) \\ \text{subject to} & \|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i, & i = 1, \ldots, m \\ & Fx = g & \end{array}$$

- 不等式称为二阶锥约束（**second-order cone**）

  $(A_i x + b_i, c_i^T x + d_i) \in$ second-order cone in $\mathbf{R}^{n_i+1}$

二阶锥优化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f^T x \qquad (A_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n},\ F \in \mathbf{R}^{p \times n}) \\ \text{subject to} & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & Fx = g \end{array}$$

- 不等式称为二阶锥约束（**second-order cone**）

  $(A_i x + b_i, c_i^T x + d_i) \in$ second-order cone in $\mathbf{R}^{n_i+1}$

- 若n_i=**0**，则该问题退化为线性规划问题；

二阶锥优化

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f^T x & (A_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n},\ F \in \mathbf{R}^{p \times n}) \\ \text{subject to} & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i, & i = 1, \ldots, m \\ & Fx = g & \end{array}$$

- 不等式称为二阶锥约束（**second-order cone**）

  $(A_i x + b_i, c_i^T x + d_i) \in$ second-order cone in $\mathbf{R}^{n_i+1}$

- 若n_i=**0**，则该问题退化为线性规划问题；
- 若c_i=**0**，则该问题退化为二次约束二次规划问题；

二阶锥优化

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f^T x & (A_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n},\ F \in \mathbf{R}^{p \times n}) \\ \text{subject to} & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i, & i = 1, \ldots, m \\ & Fx = g & \end{array}$$

- 不等式称为二阶锥约束（**second-order cone**）
  $(A_i x + b_i, c_i^T x + d_i) \in$ second-order cone in $\mathbf{R}^{n_i+1}$
- 若n_i=**0**，则该问题退化为线性规划问题；
- 若c_i=**0**，则该问题退化为二次约束二次规划问题；
- 该问题是线性规划和二次约束二次规划的推广

例

例

- 线性规划和等价的半定规划

例

- 线性规划和等价的半定规划

$$\text{LP:} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \preceq b \end{array} \qquad \text{SDP:} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & \mathbf{diag}(Ax - b) \preceq 0 \end{array}$$

例

- 线性规划和等价的半定规划

LP: minimize $c^T x$
subject to $Ax \preceq b$

SDP: minimize $c^T x$
subject to $\mathbf{diag}(Ax - b) \preceq 0$

- 二阶锥优化和等价的半定规划

例

❑ 线性规划和等价的半定规划

LP: minimize c^Tx
subject to $Ax \preceq b$

SDP: minimize c^Tx
subject to $\mathbf{diag}(Ax-b) \preceq 0$

❑ 二阶锥优化和等价的半定规划

SOCP: minimize f^Tx
subject to $\|A_ix+b_i\|_2 \le c_i^Tx+d_i, \quad i=1,\ldots,m$

SDP: minimize f^Tx
subject to $\begin{bmatrix} (c_i^Tx+d_i)I & A_ix+b_i \\ (A_ix+b_i)^T & c_i^Tx+d_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i=1,\ldots,m$

向量优化

向量优化

- 通用的向量优化问题

向量优化

- 通用的向量优化问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize (w.r.t. } K) & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \dots, m \\
& h_i(x) = 0, & i = 1, \dots, p
\end{array}
$$

向量优化

- 通用的向量优化问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize (w.r.t. } K) & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- 向量目标函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q$，指在正常锥下最小化

向量优化

- 通用的向量优化问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize (w.r.t. } K) & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- 向量目标函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q$，指在正常锥下最小化
- 凸向量优化问题

向量优化

- 通用的向量优化问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize (w.r.t. } K) & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- 向量目标函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q$，指在正常锥下最小化
- 凸向量优化问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize (w.r.t. } K) & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b &
\end{array}
$$

向量优化

- 通用的向量优化问题

$$\begin{array}{lll} \text{minimize (w.r.t. } K) & f_0(x) & \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, & i = 1, \dots, p \end{array}$$

- 向量目标函数 $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^q$，指在正常锥下最小化
- 凸向量优化问题

$$\begin{array}{lll} \text{minimize (w.r.t. } K) & f_0(x) & \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \dots, m \\ & Ax = b & \end{array}$$

  - 其中，函数f_0为K-凸函数，$f_1, \dots, f_m$ 为凸函数

最优解和Pareto最优解

最优解和Pareto最优解

- 可达目标值集合

最优解和Pareto最优解

- 可达目标值集合

$$\mathcal{O} = \{f_0(x) \mid x \text{ feasible}\}$$

最优解和Pareto最优解

- 可达目标值集合

$$\mathcal{O} = \{f_0(x) \mid x \text{ feasible}\}$$

- 可行点x为最优解，若$f_0(x)$为$\mathcal{O}$的最小元

最优解和Pareto最优解

- 可达目标值集合

$$\mathcal{O} = \{f_0(x) \mid x \text{ feasible}\}$$

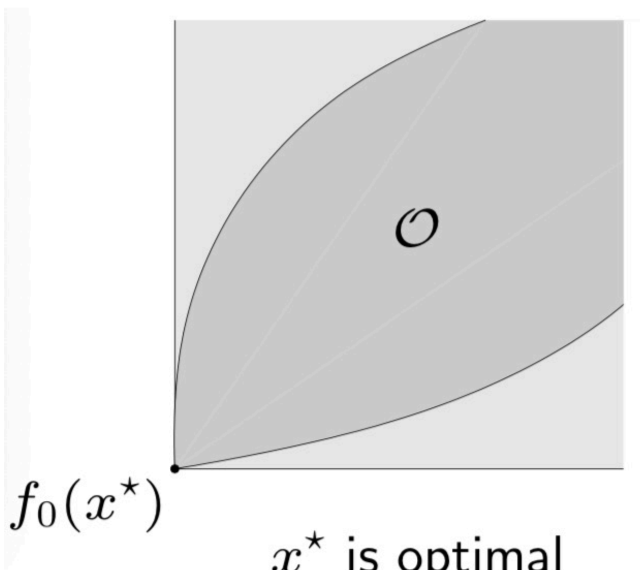
- 可行点x为最优解，若$f_0(x)$为$\mathcal{O}$的最小元
- 可行点x为**Pareto**最优解，若$f_0(x)$为$\mathcal{O}$的极小元

最优解和Pareto最优解

- 可达目标值集合

$$\mathcal{O} = \{f_0(x) \mid x \text{ feasible}\}$$

- 可行点x为最优解，若$f_0(x)$为$\mathcal{O}$的最小元
- 可行点x为**Pareto**最优解，若$f_0(x)$为$\mathcal{O}$的极小元

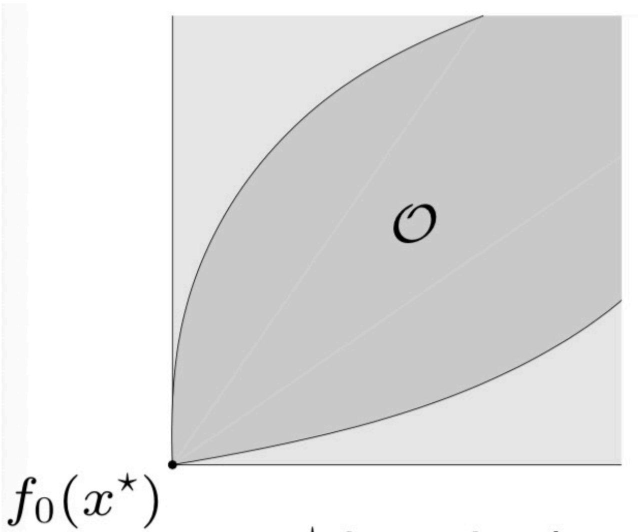


最优解和Pareto最优解

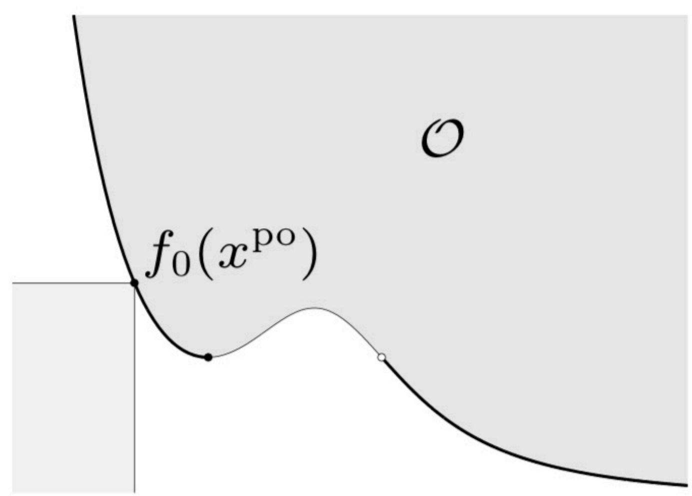
- 可达目标值集合

$$\mathcal{O} = \{f_0(x) \mid x \text{ feasible}\}$$

- 可行点x为最优解，若$f_0(x)$为$\mathcal{O}$的最小元
- 可行点x为**Pareto**最优解，若$f_0(x)$为$\mathcal{O}$的极小元



$x^\star$ is optimal



x^{po} is Pareto optimal

标量化

标量化

- 为求得**Pareto**最优点，选择 $\lambda \succ_{K^*} 0$ 求解标量问题

标量化

- 为求得**Pareto**最优点，选择 $\lambda \succ_{K^*} 0$ 求解标量问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \lambda^T f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
 & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

标量化

- 为求得**Pareto**最优点，选择 $\lambda \succ_{K^*} 0$ 求解标量问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \lambda^T f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- 对于凸向量优化问题，通过变化$\lambda \succ_{K^*} 0$可找到基本所有**Pareto**最优点

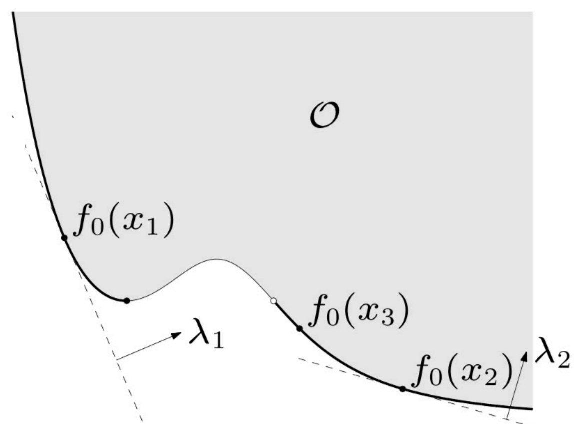
标量化

- 为求得**Pareto**最优点，选择 $\lambda \succ_{K^*} 0$ 求解标量问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \lambda^T f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m \\
 & h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

- 对于凸向量优化问题，通过变化$\lambda \succ_{K^*} 0$可找到基本所有**Pareto**最优点

若x为标量问题的最优解，则其为向量优化问题的**Pareto**最优解



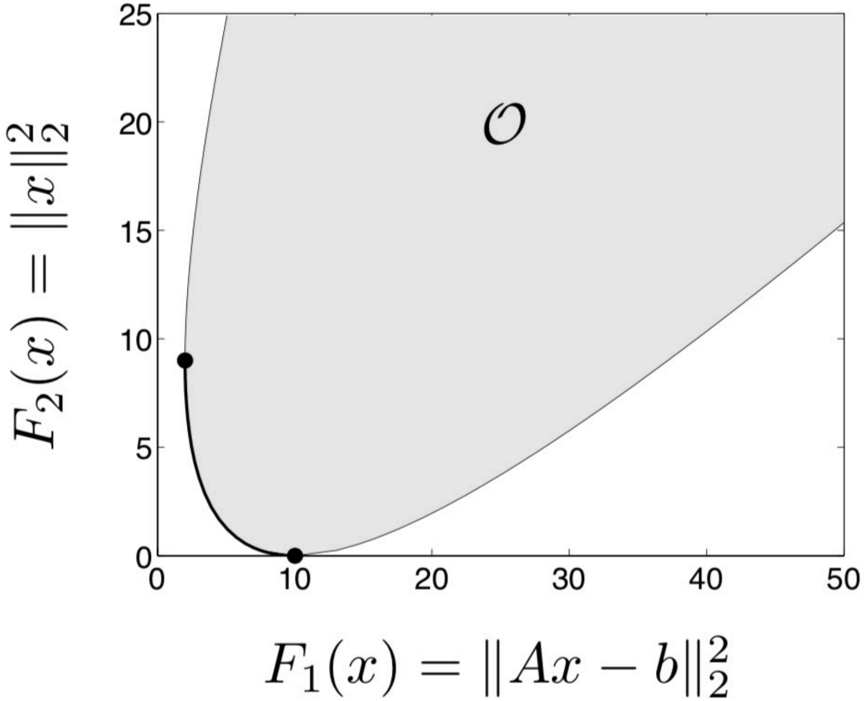
正则化最小二乘

正则化最小二乘

$$\text{minimize (w.r.t. } \mathbf{R}^2_+) \quad (\|Ax-b\|_2^2, \|x\|_2^2)$$

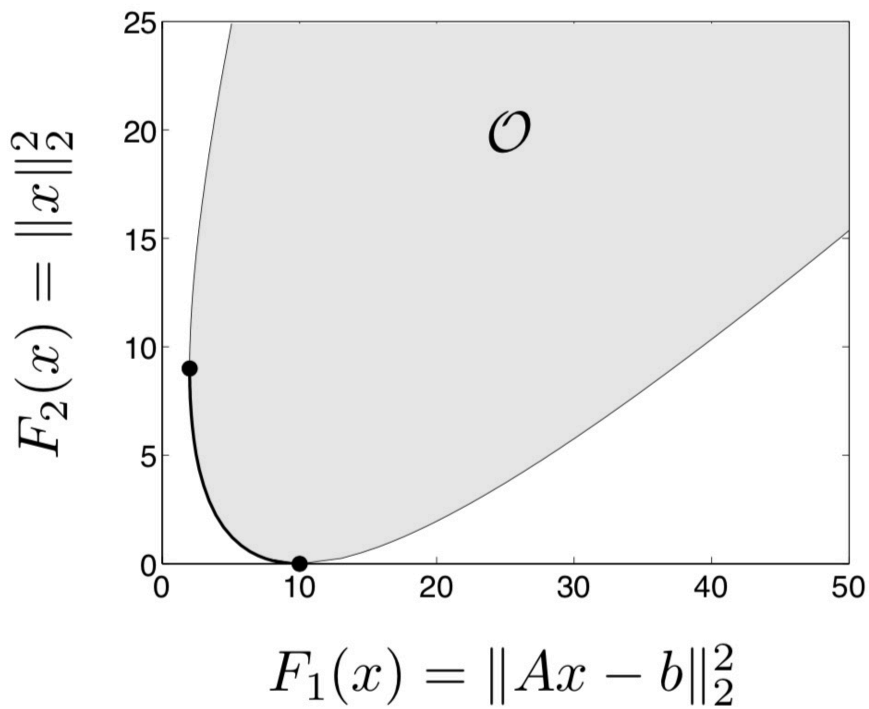
正则化最小二乘

minimize (w.r.t. $\mathbf{R}^2_+$) $\quad (\|Ax-b\|_2^2, \|x\|_2^2)$



正则化最小二乘

$$\text{minimize (w.r.t. } \mathbf{R}_+^2) \quad (\|Ax-b\|_2^2, \|x\|_2^2)$$



❑ 以 $A \in \mathbf{R}^{100\times 10}$ 为例，粗线由**Pareto**最优点构成。