最优化方法

东南大学
计算机&人工智能学院
宋沫飞
songmf@seu.edu.cn

引言

- 数学优化
- 最小二乘和线性规划
- 凸优化
- 例题
- 课程目标和内容
- 非线性优化
- 发展历史

数学优化

- （数学）优化问题/数学规划

数学优化

- （数学）优化问题/数学规划
  - 从一个可行解集合中，寻找出最优的元素

数学优化

- （数学）优化问题/数学规划
  - 从一个可行解集合中，寻找出最优的元素
- 数学形式

数学优化

- （数学）优化问题/数学规划
  - 从一个可行解集合中，寻找出最优的元素
- 数学形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

数学优化

- （数学）优化问题/数学规划
  - 从一个可行解集合中，寻找出最优的元素
- 数学形式

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$：优化变量

数学优化

- （数学）优化问题/数学规划
  - 从一个可行解集合中，寻找出最优的元素
- 数学形式

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$：优化变量
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$：目标函数

数学优化

- （数学）优化问题/数学规划
  - 从一个可行解集合中，寻找出最优的元素
- 数学形式

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$：优化变量
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$：目标函数
- $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$：约束函数

数学优化

- （数学）优化问题/数学规划
  - 从一个可行解集合中，寻找出最优的元素
- 数学形式

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$：优化变量
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$：目标函数
- $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$：约束函数
- 最优解：**在所有满足约束的向量中，向量x*对应的目标函数值最小。**

应用

应用

- 投资组合优化
  - 优化变量：各资产分配的资本数
  - 约束：总预算、每一份资产的资本范围、最小收益
  - 目标：总风险或回报

应用

- 投资组合优化
  - 优化变量：各资产分配的资本数
  - 约束：总预算、每一份资产的资本范围、最小收益
  - 目标：总风险或回报
- 电子设计中的器件尺寸
  - 优化变量：器件的长和宽
  - 约束：工程约束、时间要求、最大面积
  - 目标：总功耗

应用

- 投资组合优化
  - 优化变量：各资产分配的资本数
  - 约束：总预算、每一份资产的资本范围、最小收益
  - 目标：总风险或回报
- 电子设计中的器件尺寸
  - 优化变量：器件的长和宽
  - 约束：工程约束、时间要求、最大面积
  - 目标：总功耗
- 数据拟合
  - 优化变量：模型参数
  - 约束：先验信息、参数限制
  - 目标：预测误差

求解优化问题

求解优化问题

- 一般形式的优化问题

求解优化问题

- 一般形式的优化问题
  - 难以求解

求解优化问题

- 一般形式的优化问题
  - 难以求解
  - 折中：长时间的计算代价，找不到解

求解优化问题

- 一般形式的优化问题
  - 难以求解
  - 折中：长时间的计算代价，找不到解

- 例外：特定问题存在高效且可靠的解法

求解优化问题

- 一般形式的优化问题
  - 难以求解
  - 折中：长时间的计算代价，找不到解

- 例外：特定问题存在高效且可靠的解法
  - 最小二乘

求解优化问题

- 一般形式的优化问题
  - 难以求解
  - 折中：长时间的计算代价，找不到解

- 例外：特定问题存在高效且可靠的解法
  - 最小二乘
  - 线性规划

求解优化问题

- 一般形式的优化问题
  - 难以求解
  - 折中：长时间的计算代价，找不到解

- 例外：特定问题存在高效且可靠的解法
  - 最小二乘
  - 线性规划
  - 凸优化问题

最小二乘

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

- 最小二乘

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

- 最小二乘
  - 解析解：$x^\star = (A^TA)^{-1}A^Tb$

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

- 最小二乘
  - 解析解：$x^\star = (A^TA)^{-1}A^Tb$
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|_2^2$$

- 最小二乘
  - 解析解：$x^\star = (A^TA)^{-1}A^Tb$
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于 n^2k $(A \in \mathbf{R}^{k\times n})$；若$A$具有特殊结构，求解更快。

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

- 最小二乘
  - 解析解：$x^\star = (A^TA)^{-1}A^Tb$
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于 n^2k ($A \in \mathbf{R}^{k\times n}$)；若$A$具有特殊结构，求解更快。
  - 成熟技术

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

- 最小二乘
  - 解析解：$x^\star = (A^TA)^{-1}A^Tb$
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于 n^2k ($A \in \mathbf{R}^{k\times n}$)；若$A$具有特殊结构，求解更快。
  - 成熟技术
- 最小二乘的使用

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

- 最小二乘
  - 解析解：$x^\star = (A^TA)^{-1}A^Tb$
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于n^2k ($A \in \mathbf{R}^{k\times n}$)；若$A$具有特殊结构，求解更快。
  - 成熟技术
- 最小二乘的使用
  - 判别十分简单

最小二乘

$$\text{minimize} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

- 最小二乘
  - 解析解：$x^\star = (A^T A)^{-1} A^T b$
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于 n^2k ($A \in \mathbf{R}^{k\times n}$)；若$A$具有特殊结构，求解更快。
  - 成熟技术
- 最小二乘的使用
  - 判别十分简单
  - 使用标准方法增强灵活性（加权、正则化）

线性规划

线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 线性规划

线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

- 线性规划
  - 没有解析解

线性规划

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m\end{array}$$

- 线性规划
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件

线性规划

$$\begin{array}{ll} \textsf{minimize} & c^T x \\ \textsf{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 线性规划
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于 $n^2 m$ if $m \ge n$；若具有特殊结构，求解更快。

线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 线性规划
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于 $n^2 m$ if $m \geq n$；若具有特殊结构，求解更快。
  - 成熟技术

线性规划

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m\end{array}$$

- 线性规划
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于$n^2 m$ if $m \ge n$；若具有特殊结构，求解更快。
  - 成熟技术
- 线性规划的使用

线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 线性规划
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于n^2m if $m \geq n$；若具有特殊结构，求解更快。
  - 成熟技术
- 线性规划的使用
  - 判别难于最小二乘

线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 线性规划
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的求解算法和软件
  - 计算时间：正比于$n^2 m$ if $m \geq n$；若具有特殊结构，求解更快。
  - 成熟技术
- 线性规划的使用
  - 判别难于最小二乘
  - 一些标准的技巧可用于将某些问题转化为线性规划（分段线性方程、包含范数的问题）

凸优化问题

凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 目标函数和约束函数均为凸函数：

凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 目标函数和约束函数均为凸函数：

$$f_i(\alpha x + \beta y) \le \alpha f_i(x) + \beta f_i(y)$$

  - 若 $\alpha + \beta = 1,\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0$

凸优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 目标函数和约束函数均为凸函数：

$$f_i(\alpha x + \beta y) \le \alpha f_i(x) + \beta f_i(y)$$

  - 若 $\alpha + \beta = 1,\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0$

- 最小二乘和线性规划均为特殊的凸优化问题

凸优化问题

凸优化问题

- 凸优化问题求解

凸优化问题

- 凸优化问题求解
  - 没有解析解

凸优化问题

- 凸优化问题求解
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的解法

凸优化问题

- 凸优化问题求解
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的解法
  - 计算时间：约正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$，F是对各函数的值、一阶和二阶导数的代价

凸优化问题

- 凸优化问题求解
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的解法
  - 计算时间：约正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$，F是对各函数的值、一阶和二阶导数的代价
  - 几乎成熟

凸优化问题

- 凸优化问题求解
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的解法
  - 计算时间：约正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$，F是对各函数的值、一阶和二阶导数的代价
  - 几乎成熟
- 凸优化的使用

凸优化问题

- 凸优化问题求解
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的解法
  - 计算时间：约正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$，F是对各函数的值、一阶和二阶导数的代价
  - 几乎成熟
- 凸优化的使用
  - 通常很难判别

凸优化问题

- 凸优化问题求解
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的解法
  - 计算时间：约正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$，F是对各函数的值、一阶和二阶导数的代价
  - 几乎成熟
- 凸优化的使用
  - 通常很难判别
  - 具有很多技巧可以将其他问题转化为凸优化形式

凸优化问题

- 凸优化问题求解
  - 没有解析解
  - 具有可靠且有效的解法
  - 计算时间：约正比于 $\max\{n^3, n^2m, F\}$，F是对各函数的值、一阶和二阶导数的代价
  - 几乎成熟
- 凸优化的使用
  - 通常很难判别
  - 具有很多技巧可以将其他问题转化为凸优化形式
  - 很多问题可以通过凸优化进行求解

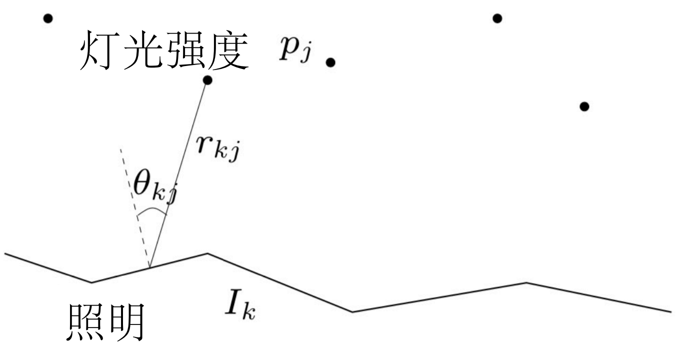
例题

例题

- M盏灯用于n块（面积小、平面）区域的照明：第k块区块的照明强度I_k和灯光强度p_j线性相关

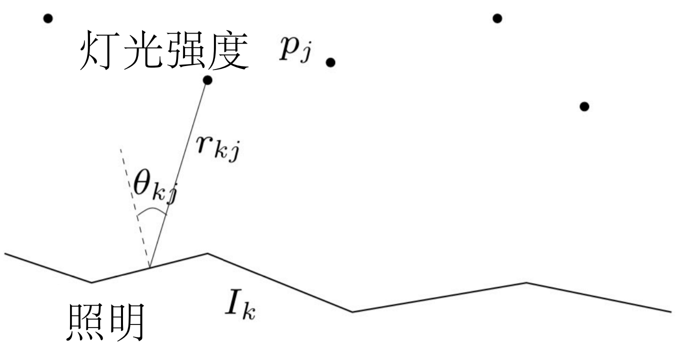
例题

- M盏灯用于n块（面积小、平面）区域的照明：第k块区块的照明强度I_k和灯光强度p_j线性相关



例题

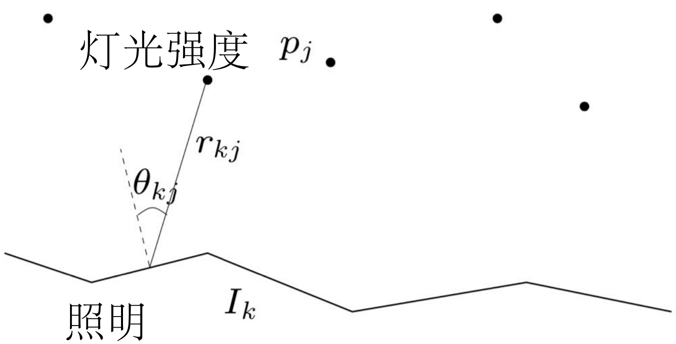
- M盏灯用于n块（面积小、平面）区域的照明：第k块区块的照明强度I_k和灯光强度p_j线性相关



$$I_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} p_j, \qquad a_{kj} = r_{kj}^{-2} \max\{\cos\theta_{kj}, 0\}$$

例题

- M盏灯用于n块（面积小、平面）区域的照明：第k块区块的照明强度I_k和灯光强度p_j线性相关

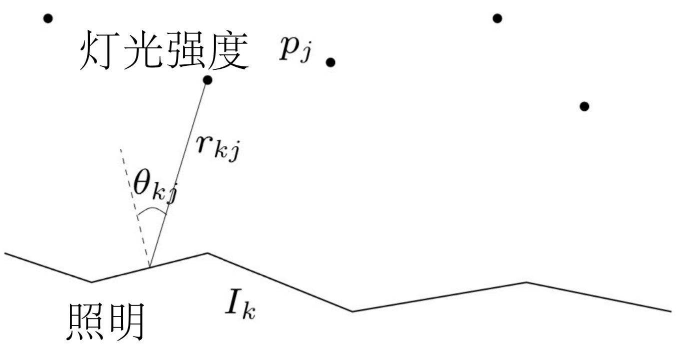


$$I_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} p_j, \qquad a_{kj} = r_{kj}^{-2} \max\{\cos\theta_{kj}, 0\}$$

- 问题：在有约束的灯光强度下获取理想的照明强度

例题

- M盏灯用于n块（面积小、平面）区域的照明：第k块区块的照明强度I_k和灯光强度p_j线性相关



$$I_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} p_j, \qquad a_{kj} = r_{kj}^{-2} \max\{\cos\theta_{kj}, 0\}$$

- 问题：在有约束的灯光强度下获取理想的照明强度

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \max_{k=1,\ldots,n} |\log I_k - \log I_{\text{des}}| \\ \text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\max}, \quad j = 1, \ldots, m \end{array}$$

如何求解

如何求解

- 使用最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2$$

  - 若得到的p_j超出范围，强制修正

如何求解

- 使用最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2$$

  - 若得到的p_j超出范围，强制修正

- 使用带权的最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^{m} w_j(p_j - p_{\max}/2)^2$$

如何求解

- 使用最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2$$

  - 若得到的p_j超出范围，强制修正

- 使用带权的最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^{m} w_j (p_j - p_{\max}/2)^2$$

  - 迭代调整权重，直到 $0 \le p_j \le p_{\max}$

如何求解

- 使用最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2$$

  - 若得到的p_j超出范围，强制修正

- 使用带权的最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^{m} w_j(p_j - p_{\text{max}}/2)^2$$

  - 迭代调整权重，直到 $0 \le p_j \le p_{\text{max}}$

- 使用线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \max_{k=1,\ldots,n} |I_k - I_{\text{des}}| \\ \text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\text{max}}, \quad j = 1,\ldots,m \end{array}$$

如何求解

- 使用最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2$$

  - 若得到的p_j超出范围，强制修正

- 使用带权的最小二乘

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{\text{des}})^2 + \sum_{j=1}^{m} w_j(p_j - p_{\max}/2)^2$$

  - 迭代调整权重，直到 $0 \le p_j \le p_{\max}$

- 使用线性规划

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \max_{k=1,\ldots,n} |I_k - I_{\text{des}}| \\ \text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\max}, \quad j = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 显然，上述解法均为近似解法

使用凸优化

使用凸优化

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(p) = \max_{k=1,\ldots,n} h(I_k/I_{\text{des}}) \\
\text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\text{max}}, \quad j = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

使用凸优化

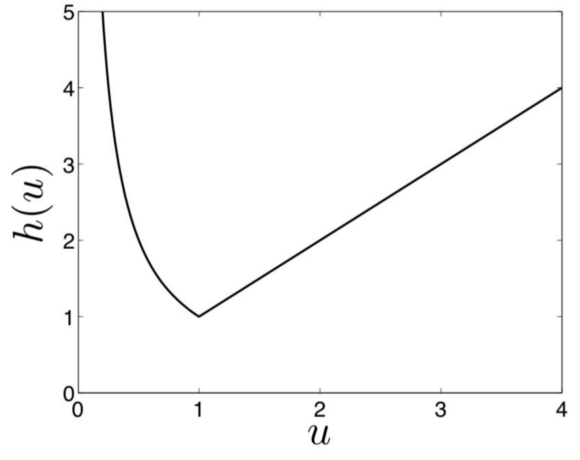
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(p) = \max_{k=1,\ldots,n} h(I_k/I_{\text{des}}) \\ \text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\text{max}}, \quad j = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 此处：$h(u) = \max\{u, 1/u\}$

使用凸优化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(p) = \max_{k=1,\dots,n} h(I_k/I_{\text{des}}) \\ \text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\max}, \quad j = 1, \dots, m \end{array}$$

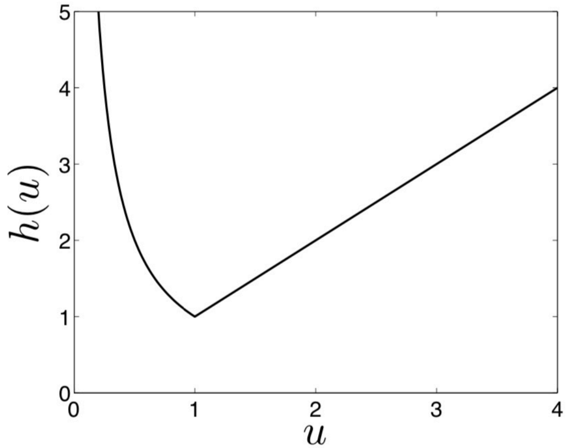
- 此处： $h(u) = \max\{u, 1/u\}$



使用凸优化

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(p) = \max_{k=1,\ldots,n} h(I_k/I_{\mathrm{des}}) \\
\text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\max}, \quad j = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

- 此处：$h(u) = \max\{u, 1/u\}$

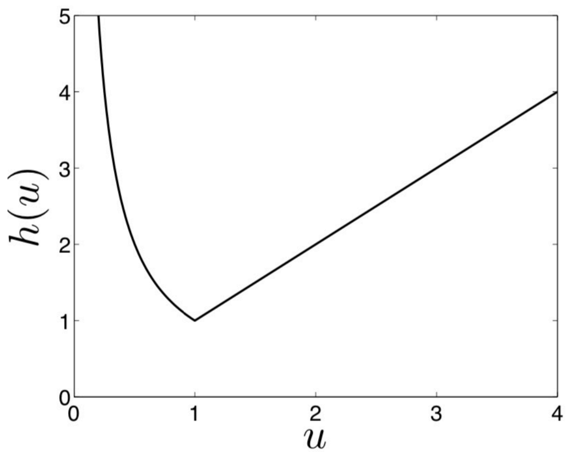


- 该函数为凸函数：多个凸函数的最大化函数仍为凸函数

使用凸优化

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(p) = \max_{k=1,\ldots,n} h(I_k/I_{\text{des}}) \\ \text{subject to} & 0 \le p_j \le p_{\max}, \quad j = 1, \ldots, m \end{array}$$

- 此处：$h(u) = \max\{u, 1/u\}$



- 该函数为凸函数：多个凸函数的最大化函数仍为凸函数
- 精确求解的代价比最小二乘法略大

思考

思考

- 额外约束：约束增加会否使问题复杂?
  - 任意**10**盏灯的照明强度不会超过总能量的一半
  - 打开的灯不超过总数的一半

思考

- 额外约束：约束增加会否使问题复杂?
  - 任意**10**盏灯的照明强度不会超过总能量的一半
  - 打开的灯不超过总数的一半

- 答案：增加条件**1**，问题仍然很容易求解；增加条件**2**，大大增加问题的难度

思考

- 额外约束：约束增加会否使问题复杂?
  - 任意**10**盏灯的照明强度不会超过总能量的一半
  - 打开的灯不超过总数的一半

- 答案：增加条件**1**，问题仍然很容易求解；增加条件**2**，大大增加问题的难度
- 寓意：直觉不总是正确；没有背景知识，非常容易的问题和非常困难的问题看起来会十分相似。

课程目标和内容

课程目标和内容

- 目标
  - 能够将一些问题形式化为凸优化问题
  - 能够求解具有一定规模的优化问题
  - 对求解过程的性能进行分析

课程目标和内容

- 目标
  - 能够将一些问题形式化为凸优化问题
  - 能够求解具有一定规模的优化问题
  - 对求解过程的性能进行分析
- 内容
  - 理论：凸集、凸函数、凸优化问题
  - 应用
  - 算法

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路
- 局部优化

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路
- 局部优化
  - 在可行解中寻找近似最小的点

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路
- 局部优化
  - 在可行解中寻找近似最小的点
  - 速度快

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路
- 局部优化
  - 在可行解中寻找近似最小的点
  - 速度快
  - 需要初始解

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路
- 局部优化
  - 在可行解中寻找近似最小的点
  - 速度快
  - 需要初始解
  - 不能提供和全局最优解的差距信息

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路
- 局部优化
  - 在可行解中寻找近似最小的点
  - 速度快
  - 需要初始解
  - 不能提供和全局最优解的差距信息
- 全局优化

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路
- 局部优化
  - 在可行解中寻找近似最小的点
  - 速度快
  - 需要初始解
  - 不能提供和全局最优解的差距信息
- 全局优化
  - 计算时间和问题规模呈指数增长关系

非线性优化

- 非凸的优化问题求解思路
- 局部优化
  - 在可行解中寻找近似最小的点
  - 速度快
  - 需要初始解
  - 不能提供和全局最优解的差距信息
- 全局优化
  - 计算时间和问题规模呈指数增长关系
- 上述方法大多基于求解凸的子问题

发展历史

发展历史

- 凸分析理论：**1900-1970**

发展历史

- 凸分析理论： **1900-1970**
- 算法

发展历史

- 凸分析理论： **1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划

发展历史

- 凸分析理论： **1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划
  - **1947:**单纯形法

发展历史

- 凸分析理论： **1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划
  - **1947:**单纯形法
  - **1960**年代： 早期的内点法

发展历史

- 凸分析理论： **1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划
  - **1947:**单纯形法
  - **1960**年代： 早期的内点法
  - **1970**年代： 椭球法和其他次梯度法

发展历史

- 凸分析理论：**1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划
  - **1947:**单纯形法
  - **1960**年代：早期的内点法
  - **1970**年代：椭球法和其他次梯度法
  - **1980**年代：面向线性规划的多项式时间的内点法

发展历史

- 凸分析理论： **1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划
  - **1947:**单纯形法
  - **1960**年代：早期的内点法
  - **1970**年代：椭球法和其他次梯度法
  - **1980**年代：面向线性规划的多项式时间的内点法
  - **1980**年代后期至今：面向非线性凸优化的多项式时间的内点法

发展历史

- 凸分析理论：**1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划
  - **1947:**单纯形法
  - **1960**年代：早期的内点法
  - **1970**年代：椭球法和其他次梯度法
  - **1980**年代：面向线性规划的多项式时间的内点法
  - **1980**年代后期至今：面向非线性凸优化的多项式时间的内点法
- 应用

发展历史

- 凸分析理论： **1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划
  - **1947:**单纯形法
  - **1960**年代： 早期的内点法
  - **1970**年代： 椭球法和其他次梯度法
  - **1980**年代： 面向线性规划的多项式时间的内点法
  - **1980**年代后期至今： 面向非线性凸优化的多项式时间的内点法
- 应用
  - **1990**前： 工程应用很少

发展历史

- 凸分析理论： **1900-1970**
- 算法
  - **1939:**线性规划
  - **1947:**单纯形法
  - **1960**年代： 早期的内点法
  - **1970**年代： 椭球法和其他次梯度法
  - **1980**年代： 面向线性规划的多项式时间的内点法
  - **1980**年代后期至今： 面向非线性凸优化的多项式时间的内点法
- 应用
  - **1990**前： 工程应用很少
  - 自**1990**年： 工程应用开始增多（控制、信号处理、通讯、电路设计）； 新的问题类型（半正定规划等）