最优化方法

东南大学

计算机&人工智能学院

宋沫飞

songmf@seu.edu.cn

凸集

- 仿射集合
- 凸集
- 重要案例
- 保凸运算
- 广义不等式
- 分离与支撑超平面
- 对偶锥与广义不等式

仿射集合

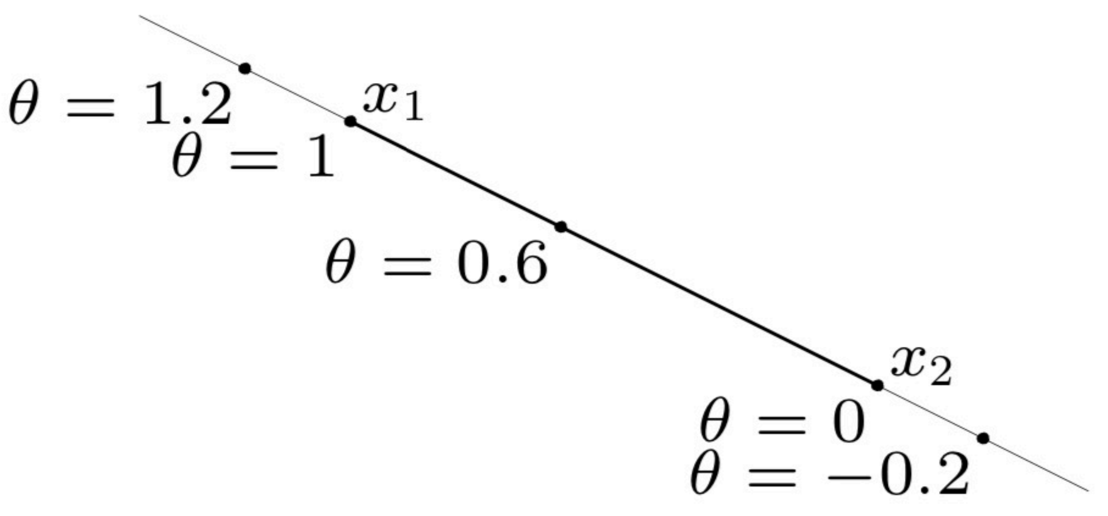
仿射集合

- 经过x_1和x_2的直线所有点

仿射集合

- 经过x_1和x_2的直线所有点

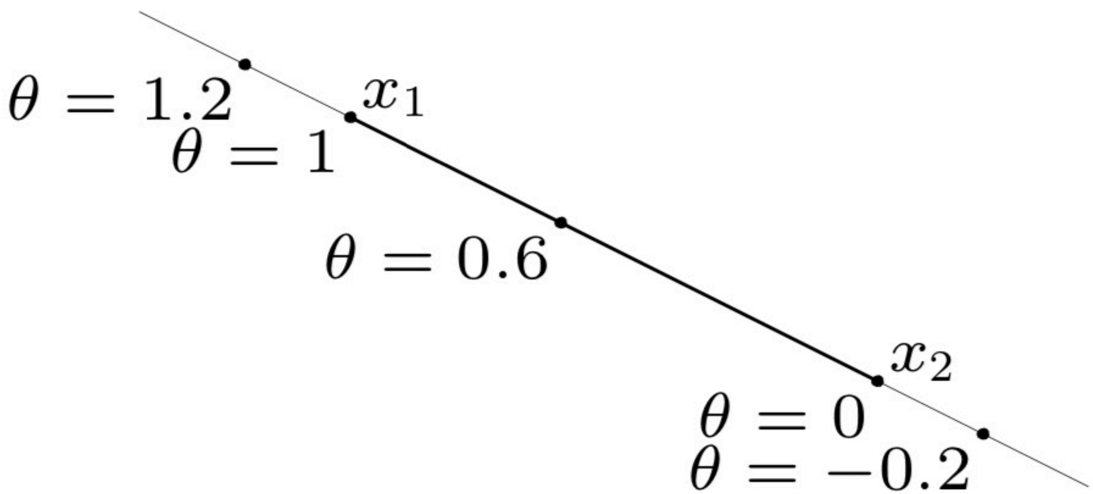
$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \qquad (\theta \in \mathbf{R})$$



仿射集合

- 经过x_1和x_2的直线所有点

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \qquad (\theta \in \mathbf{R})$$



- 仿射集合：经集合中任意两点的直线仍在该集合中

仿射组合

仿射组合

- 设$\theta_1+\ldots+\theta_k=1$, 形如$\theta_1 x_1+\ldots+\theta_k x_k$的点为仿射组合

仿射组合

- 设$\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$, 形如$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$的点为仿射组合
- 仿射集合的扩展定义

仿射组合

- 设$\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$, 形如$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$的点为仿射组合
- 仿射集合的扩展定义
  - 包含集合中任意点的仿射组合的集合

仿射组合

- 设$\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$, 形如$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$的点为仿射组合
- 仿射集合的扩展定义
  - 包含集合中任意点的仿射组合的集合
  - 是否等价：经集合中任意两点的直线在该集合中

仿射组合

- 设$\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$, 形如$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$的点为仿射组合
- 仿射集合的扩展定义
  - 包含集合中任意点的仿射组合的集合
  - 是否等价：经集合中任意两点的直线在该集合中
- 证明：仿射集合C内x_1，x_2，x_3，$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$

仿射组合

- 设$\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$, 形如$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$的点为仿射组合
- 仿射集合的扩展定义
  - 包含集合中任意点的仿射组合的集合
  - 是否等价：经集合中任意两点的直线在该集合中
- 证明：仿射集合C内x_1，x_2，x_3，$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$
  - 考虑$\dfrac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} x_1 + \dfrac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} x_2 \in C$

仿射组合

- 设$\theta_1+\ldots+\theta_k=1$, 形如$\theta_1 x_1+\ldots+\theta_k x_k$的点为仿射组合
- 仿射集合的扩展定义
  - 包含集合中任意点的仿射组合的集合
  - 是否等价：经集合中任意两点的直线在该集合中
- 证明：仿射集合C内x_1，x_2，x_3，$\theta_1+\theta_2+\theta_3=1$
  - 考虑$\dfrac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}x_1+\dfrac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}x_2 \in C$
  - $(\theta_1+\theta_2)(\dfrac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}x_1+\dfrac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}x_2)+(1-\theta_1-\theta_2)x_3 \in C$

仿射组合

- 设$\theta_1+\ldots+\theta_k=1$, 形如$\theta_1x_1+\ldots+\theta_kx_k$的点为仿射组合
- 仿射集合的扩展定义
  - 包含集合中任意点的仿射组合的集合
  - 是否等价：经集合中任意两点的直线在该集合中
- 证明：仿射集合C内x_1，x_2，x_3，$\theta_1+\theta_2+\theta_3=1$
  - 考虑$\dfrac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}x_1+\dfrac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}x_2\in C$
  - $(\theta_1+\theta_2)(\dfrac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}x_1+\dfrac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}x_2)+(1-\theta_1-\theta_2)x_3\in C$
  - $\theta_1x_1+\theta_2x_2+\theta_3x_x\in C$

子空间

子空间

- 仿射集合C内x_1和x_2，则$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$

子空间

- 仿射集合C内x_1和x_2，则$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$
- 考虑点$\alpha x_1 + \beta x_2$是否属于C

子空间

- 仿射集合C内x_1和x_2，则$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$
- 考虑点$\alpha x_1 + \beta x_2$是否属于C
- $V=C-x_0=\{x-x_0 | x \in C\}$:与$C$相关的子空间

子空间

- 仿射集合C内x_1和x_2，则$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$
- 考虑点$\alpha x_1 + \beta x_2$是否属于C
- $V=C-x_0=\{x-x_0 | x \in C\}$:与$C$相关的子空间
  - 关于加法和数乘是封闭的

子空间

- 仿射集合C内x_1和x_2，则$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$
- 考虑点$\alpha x_1 + \beta x_2$是否属于C
- $V=C-x_0=\{x-x_0|x \in C\}$:与$C$相关的子空间
  - 关于加法和数乘是封闭的
  - 对于$v_1, v_2 \in V, \alpha, \beta \in R$，则$\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$

子空间

- 仿射集合C内x_1和x_2，则$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$
- 考虑点$\alpha x_1 + \beta x_2$是否属于C
- $V=C-x_0=\{x-x_0|x \in C\}$:与$C$相关的子空间
  - 关于加法和数乘是封闭的
  - 对于$v_1, v_2 \in V, \alpha, \beta \in R$，则$\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$

$$\alpha(v_1 + x_0) + \beta(v_2 + x_0) + (1-\alpha-\beta)x_0 \in C$$

子空间

- 仿射集合C内x_1和x_2，则$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$
- 考虑点$\alpha x_1 + \beta x_2$是否属于C
- $V = C - x_0 = \{x - x_0 | x \in C\}$:与$C$相关的子空间
  - 关于加法和数乘是封闭的
  - 对于$v_1, v_2 \in V, \alpha, \beta \in R$，则$\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$

$$\alpha(v_1 + x_0) + \beta(v_2 + x_0) + (1 - \alpha - \beta)x_0 \in C$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + x_0 \in C$$

子空间

- 仿射集合C内x_1和x_2，则$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$
- 考虑点$\alpha x_1 + \beta x_2$是否属于C
- $V=C-x_0=\{x-x_0 | x \in C\}$:与$C$相关的子空间
  - 关于加法和数乘是封闭的
  - 对于$v_1, v_2 \in V, \alpha, \beta \in R$，则$\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$

$$\alpha(v_1 + x_0) + \beta(v_2 + x_0) + (1-\alpha-\beta)x_0 \in C$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + x_0 \in C$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$$

线性方程组

- 线性方程组的解集$C=\{x \mid Ax = b\}$都是仿射集合

线性方程组

- 线性方程组的解集$C=\{x \mid Ax = b\}$都是仿射集合
  - 证明：对于$x_1, x_2 \in C$，则$Ax_1=b$，$Ax_2=b$

线性方程组

- 线性方程组的解集$C=\{x \mid Ax = b\}$都是仿射集合
  - 证明：对于$x_1, x_2 \in C$，则$Ax_1=b$，$Ax_2=b$

$$
\begin{aligned}
A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) &= \theta A x_1 + (1-\theta) A x_2 \\
&= \theta b + (1-\theta) b \\
&= b,
\end{aligned}
$$

线性方程组

- 线性方程组的解集$C=\{x \mid Ax = b\}$都是仿射集合
  - 证明：对于$x_1, x_2 \in C$，则$Ax_1=b$，$Ax_2=b$

$$\begin{aligned} A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) &= \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \\ &= \theta b + (1-\theta)b \\ &= b, \end{aligned}$$

  - 与C相关的子空间V:

线性方程组

- 线性方程组的解集$C=\{x \mid Ax=b\}$都是仿射集合
  - 证明：对于$x_1, x_2 \in C$，则$Ax_1=b$，$Ax_2=b$

$$
\begin{aligned}
A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) &= \theta A x_1 + (1-\theta)Ax_2 \\
&= \theta b + (1-\theta)b \\
&= b,
\end{aligned}
$$

  - 与C相关的子空间V:
  - $V=\{x-x_0 | x \in \boldsymbol{C}\}$ $=\{x-x_0 | Ax=b\}, Ax_0=b$

线性方程组

- 线性方程组的解集$C=\{x \mid Ax = b\}$都是仿射集合
  - 证明：对于$x_1, x_2 \in C$，则$Ax_1=b$，$Ax_2=b$

$$
\begin{aligned}
A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) &= \theta A x_1 + (1-\theta)Ax_2 \\
&= \theta b + (1-\theta)b \\
&= b,
\end{aligned}
$$

  - 与C相关的子空间V:
  - $V= \{x-x_0|x \in \boldsymbol{C}\} \quad = \{x-x_0|Ax=b\}, Ax_0=b$

$= \{x-x_0|A(x-x_0)=\mathbf{0}\} \quad = \{y|Ay=\mathbf{0}\}$

线性方程组

- 线性方程组的解集$C=\{x \mid Ax=b\}$都是仿射集合
  - 证明：对于$x_1, x_2 \in C$，则$Ax_1=b$，$Ax_2=b$

$$
\begin{aligned}
A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) &= \theta A x_1 + (1-\theta) A x_2 \\
&= \theta b + (1-\theta) b \\
&= b,
\end{aligned}
$$

  - 与C相关的子空间V:
  - $V = \{x - x_0 \mid x \in C\} = \{x - x_0 \mid Ax=b\}, Ax_0=b$

    $= \{x - x_0 \mid A(x-x_0)=0\} = \{y \mid Ay=0\}$
- 任意仿射集合都可以表示为一个线性方程组的解集

仿射包

仿射包

- 任意集合C，构造尽可能小的仿射集

仿射包

- 任意集合C，构造尽可能小的仿射集
- 仿射包

仿射包

- 任意集合C，构造尽可能小的仿射集
- 仿射包

$$\mathbf{aff}\, C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

仿射包

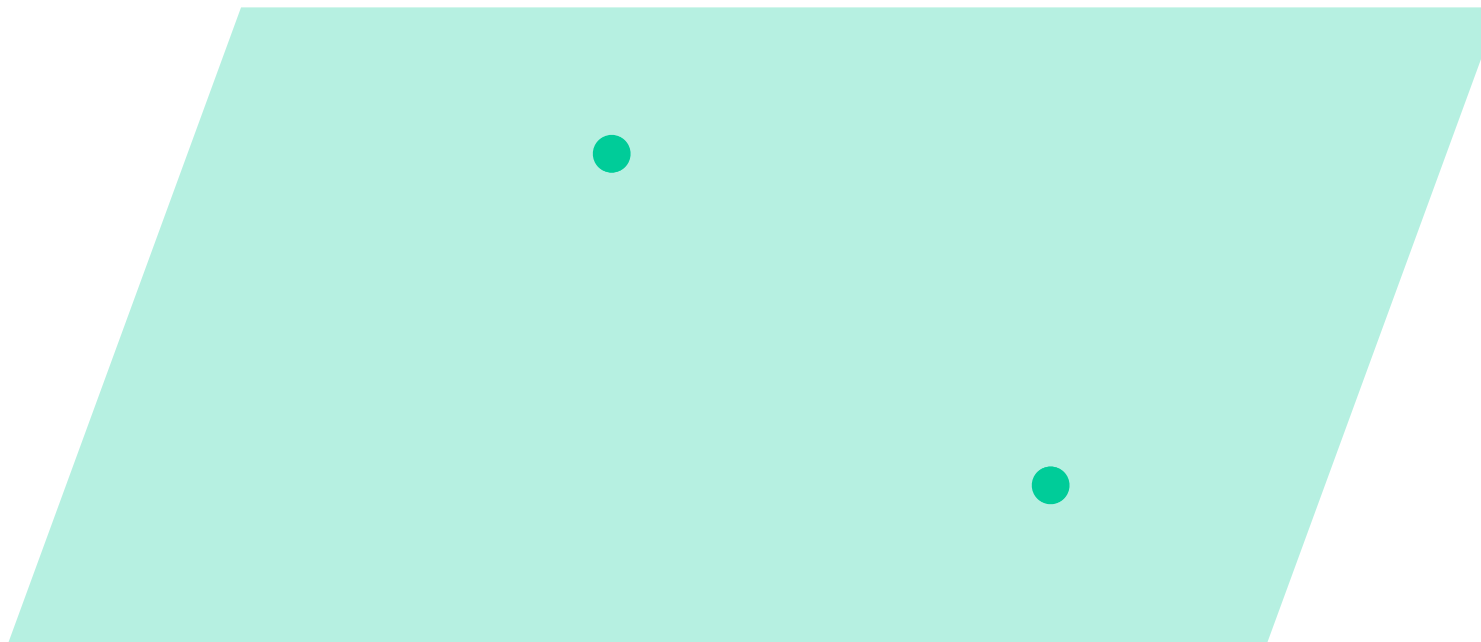
- 任意集合C，构造尽可能小的仿射集
- 仿射包

$$\textbf{aff}\, C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

仿射包

- 任意集合C，构造尽可能小的仿射集
- 仿射包

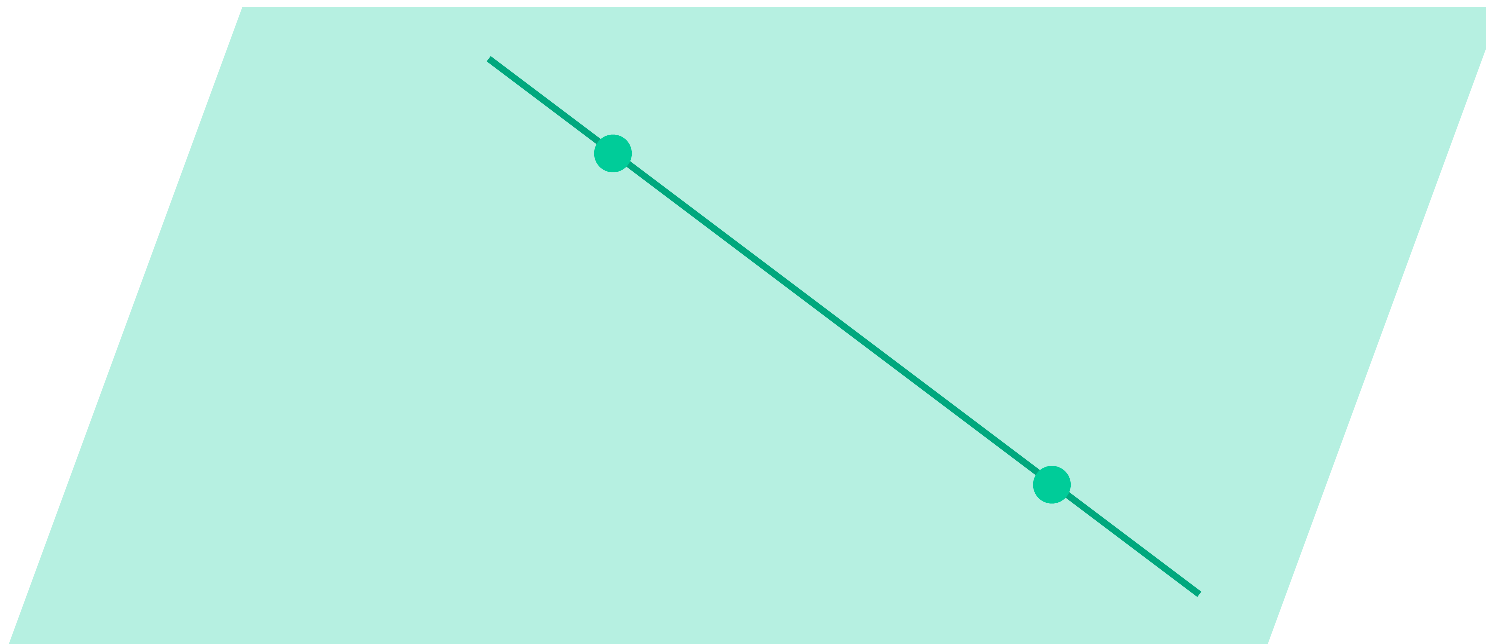
$$\mathbf{aff}\, C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$



仿射包

- 任意集合C，构造尽可能小的仿射集
- 仿射包

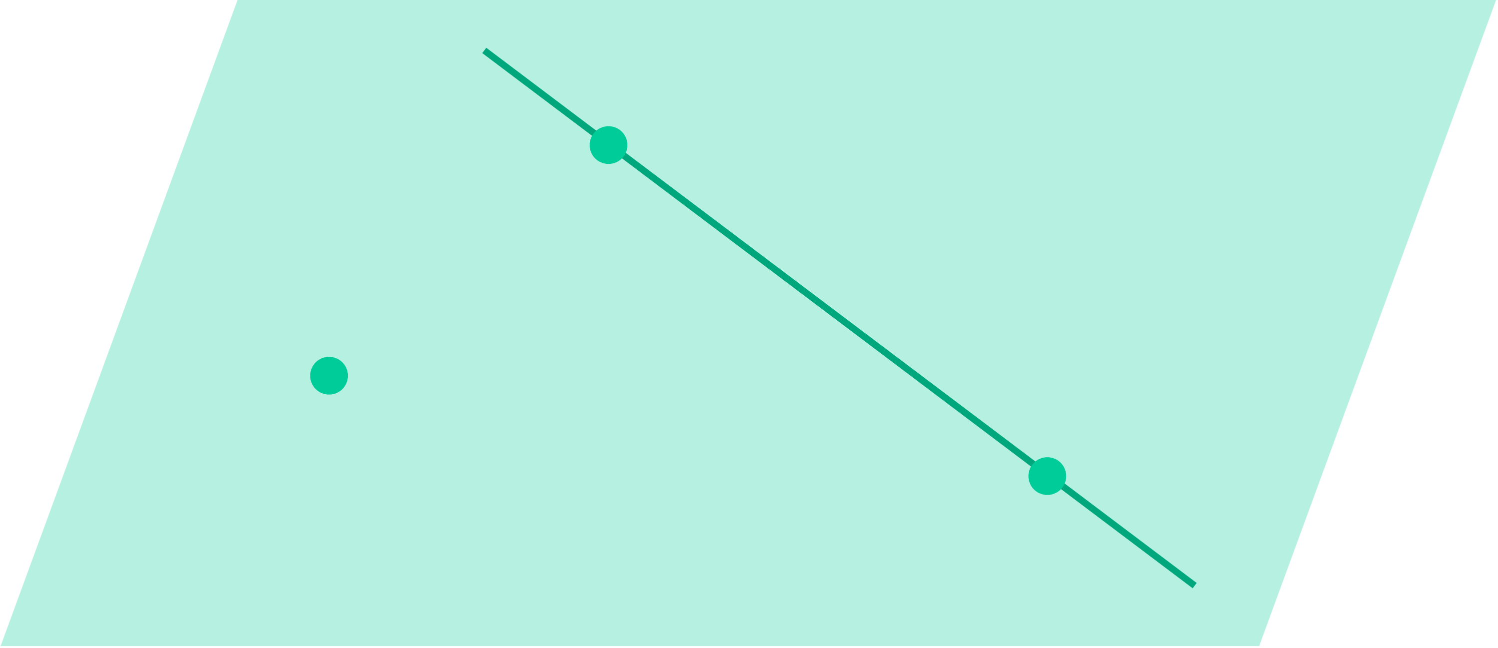
$$\mathbf{aff}\, C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$



仿射包

- 任意集合C，构造尽可能小的仿射集
- 仿射包

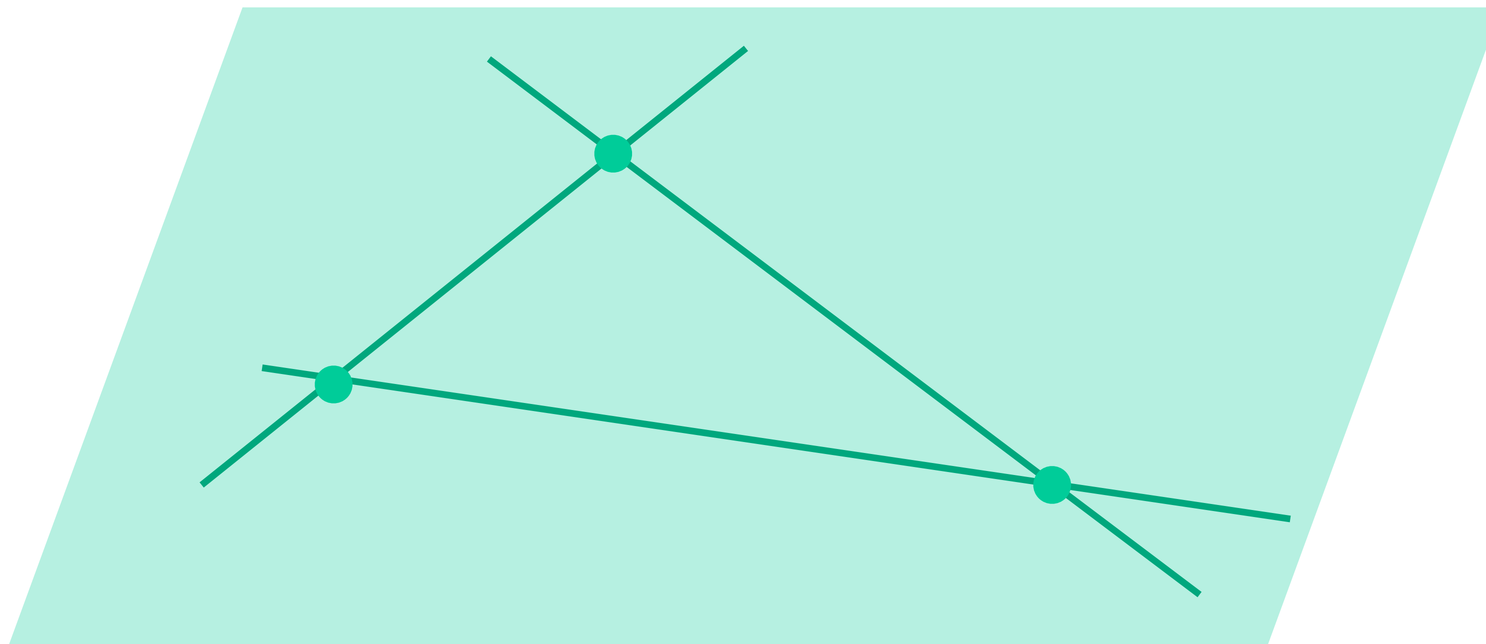
$$\mathbf{aff}\, C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$



仿射包

- 任意集合C，构造尽可能小的仿射集
- 仿射包

$$\mathbf{aff}\, C = \{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in C,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$



凸集

凸集

- 连接x_1和x_2的线段所有点

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta) x_2$$

  - 此处：$0 \le \theta \le 1$

凸集

- 连接x_1和x_2的线段所有点

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$$

  - 此处：$0 \le \theta \le 1$

- 凸集：集合中任意两点间的线段仍然集合中

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$

凸集

- 连接x_1和x_2的线段所有点

$$x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2$$

  - 此处：$0 \leq \theta \leq 1$

- 凸集：集合中任意两点间的线段仍然集合中

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

- 例：

凸集

- 连接x_1和x_2的线段所有点

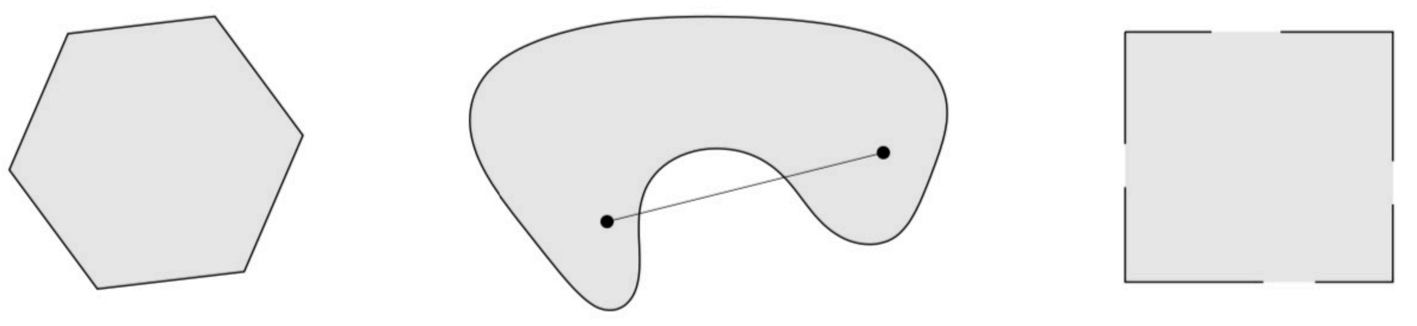
$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$$

  - 此处：$0 \le \theta \le 1$

- 凸集：集合中任意两点间的线段仍然集合中

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$

- 例：



凸组合和凸包

凸组合和凸包

- 点$x_1, \ldots, x_k$的凸组合：满足下列形式的点

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k$$

  - 此处: $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1,\ \theta_i \geq 0$

凸组合和凸包

- 点$x_1, \ldots, x_k$的凸组合：满足下列形式的点

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k$$

  - 此处：$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1,\ \theta_i \geq 0$

- 凸包**conv** S：集合S中所有点的凸组合的集合

凸组合和凸包

- 点$x_1, \ldots, x_k$的凸组合：满足下列形式的点

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k$$

  - 此处: $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1,\ \theta_i \geq 0$

- 凸包**conv** S：集合S中所有点的凸组合的集合

$$\{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C,\ \theta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

凸组合和凸包

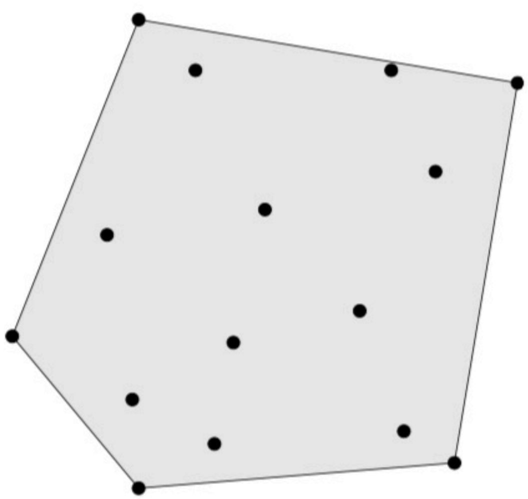
- 点$x_1, \ldots, x_k$的凸组合：满足下列形式的点

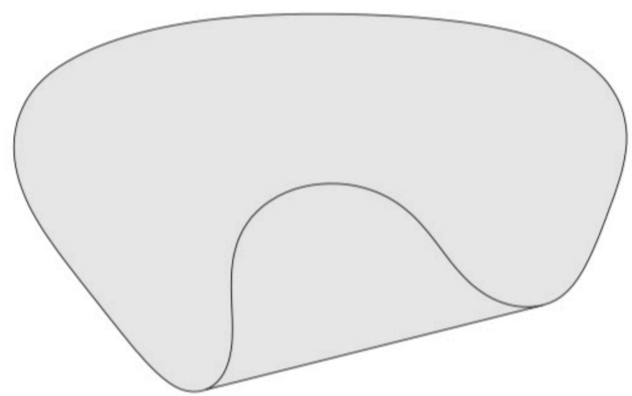
$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k$$

  - 此处：$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1,\ \theta_i \geq 0$

- 凸包**conv** S：集合S中所有点的凸组合的集合

$$\{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C,\ \theta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$





锥

锥

- C是锥，则对于$x \in C$ and $\theta \geq 0$ ，有 $\theta x \in C$

锥

- C是锥，则对于$x \in C$ and $\theta \geq 0$ ，有 $\theta x \in C$
- 点x_1和x_2的锥组合（非负线性组合）：

锥

- C是锥，则对于$x \in C$ and $\theta \geq 0$ ，有 $\theta x \in C$
- 点x_1和x_2的锥组合（非负线性组合）：

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$

锥

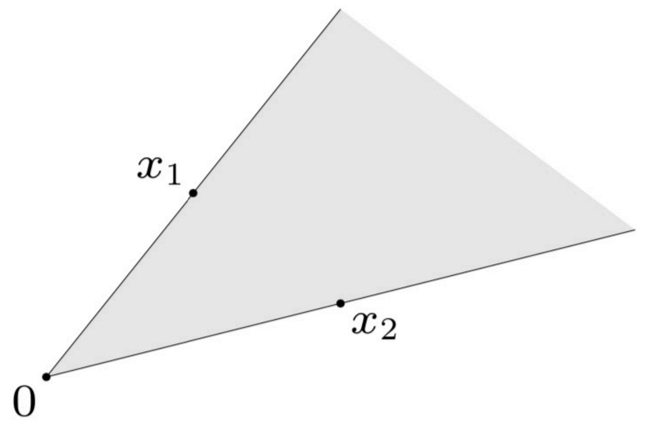
- C是锥，则对于$x \in C$ and $\theta \geq 0$ ，有 $\theta x \in C$
- 点x_1和x_2的锥组合（非负线性组合）：

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \qquad \theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$$

锥

- C是锥，则对于$x \in C$ and $\theta \geq 0$ ，有 $\theta x \in C$
- 点x_1和x_2的锥组合（非负线性组合）：

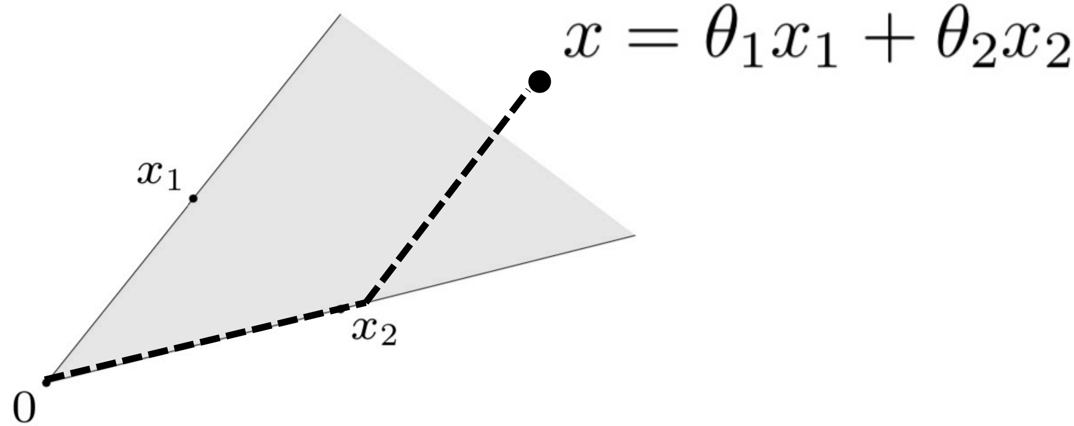
$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \qquad \theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$$



锥

- C是锥，则对于$x \in C$ and $\theta \geq 0$ ，有 $\theta x \in C$
- 点x_1和x_2的锥组合（非负线性组合）：

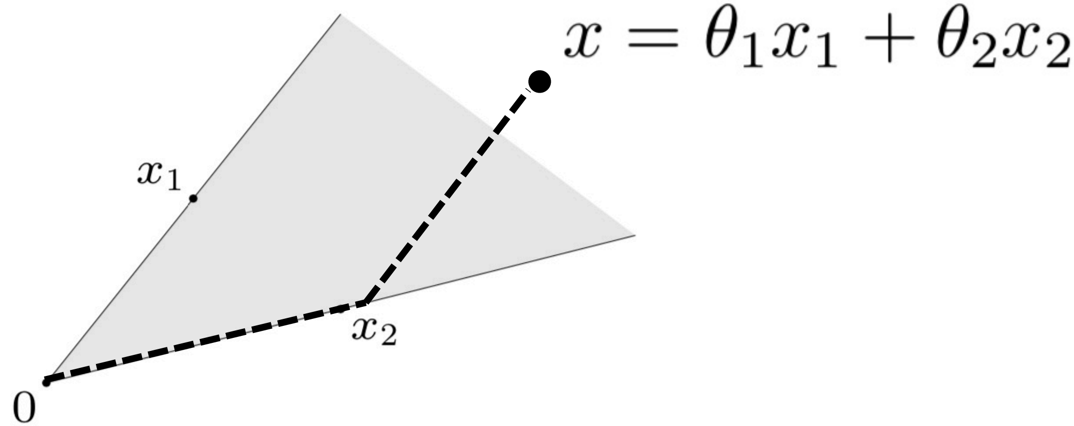
$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \qquad \theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$$



锥

- C是锥，则对于$x \in C$ and $\theta \geq 0$ ，有 $\theta x \in C$
- 点x_1和x_2的锥组合（非负线性组合）：

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \qquad \theta_1 \geq 0,\ \theta_2 \geq 0$$



- 锥包：集合中所有元素的锥组合的集合

$$\{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \mid x_i \in C,\ \theta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k\}$$

比较

比较

- 仿射组合: $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$

比较

- 仿射组合: $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$
- 凸组合: $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1,\ \theta_i \geq 0$

比较

- 仿射组合：$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$
- 凸组合：$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1,\ \theta_i \geq 0$
- 锥组合：$\theta_1, \ldots, \theta_k \ \geq\ 0$

比较

- 仿射组合: $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$
- 凸组合: $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1,\ \theta_i \geq 0$
- 锥组合: $\theta_1, \ldots, \theta_k \ \geq \ 0$
- $C=\{x\}$

比较

- 仿射组合：$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$
- 凸组合：$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1,\ \theta_i \geq 0$
- 锥组合：$\theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0$
- $C=\{x\}$
  - $\theta_1 x + \theta_2 x = x$

超平面和半空间

超平面和半空间

- 超平面

超平面和半空间

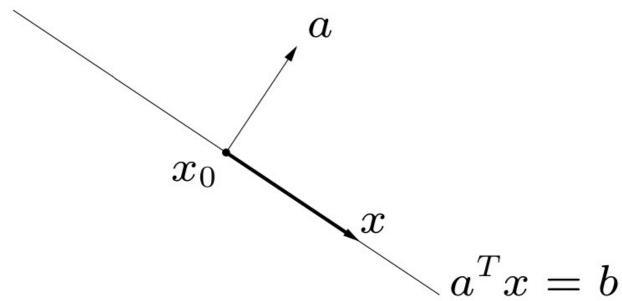
- 超平面

$$\{x \mid a^T x = b\} \ (a \neq 0)$$

超平面和半空间

❑ 超平面

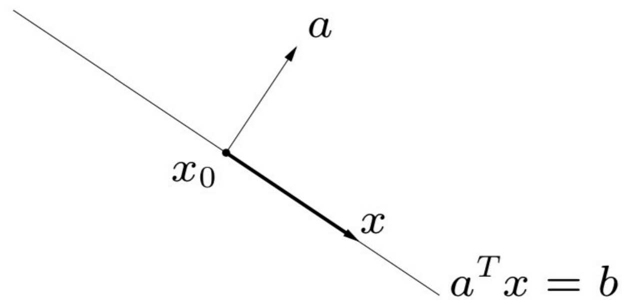
$$\{x \mid a^T x = b\}\ (a \neq 0)$$



超平面和半空间

- 超平面

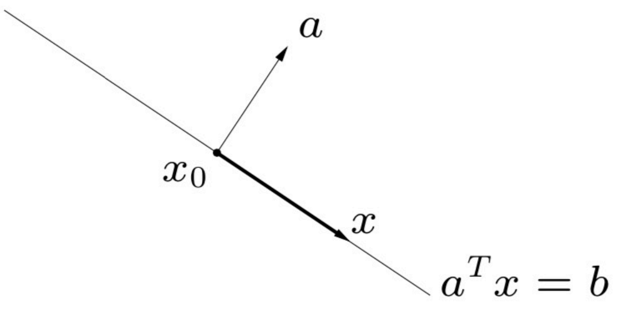
$$\{x \mid a^T x = b\} \ (a \neq 0)$$



- 半空间

超平面和半空间

- 超平面



$$\{x \mid a^T x = b\} \ (a \neq 0)$$

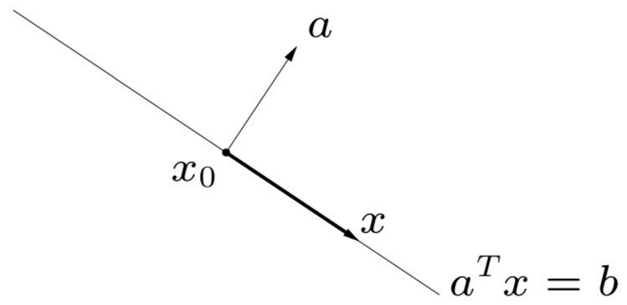
- 半空间

$$\{x \mid a^T x \leq b\} \ (a \neq 0)$$

超平面和半空间

- 超平面

$$\{x \mid a^T x = b\} \ (a \neq 0)$$



- 半空间

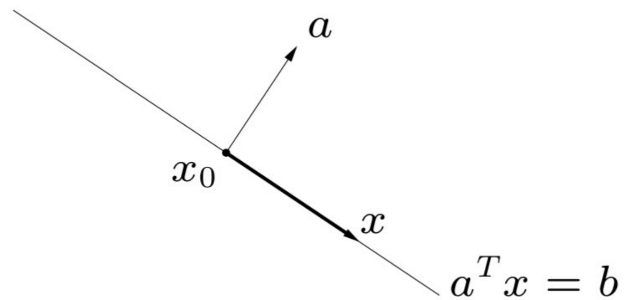
$$\{x \mid a^T x \leq b\} \ (a \neq 0)$$

  - a：法向量

超平面和半空间

- 超平面

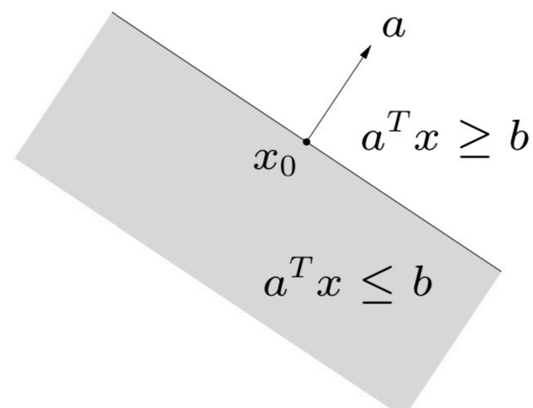
$$\{x \mid a^T x = b\} \ (a \neq 0)$$



- 半空间

$$\{x \mid a^T x \leq b\} \ (a \neq 0)$$

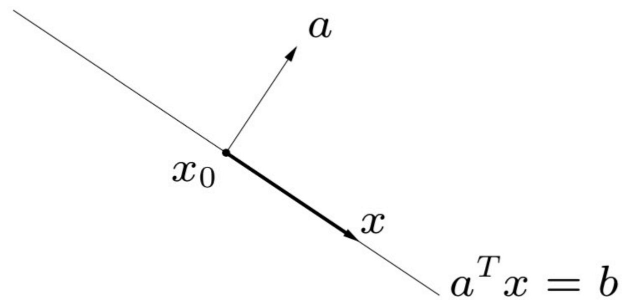
  - a：法向量



超平面和半空间

❑ 超平面

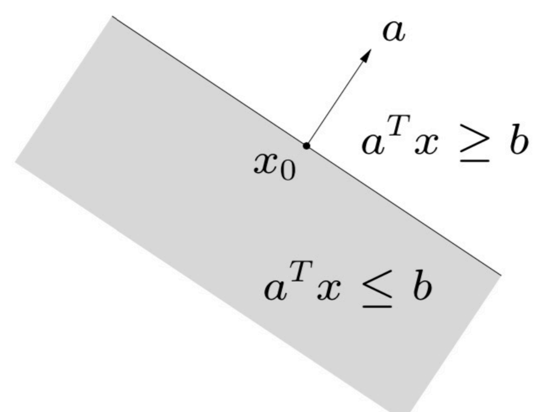
$$\{x \mid a^T x = b\}\ (a \neq 0)$$



❑ 半空间

$$\{x \mid a^T x \leq b\}\ (a \neq 0)$$

- a：法向量

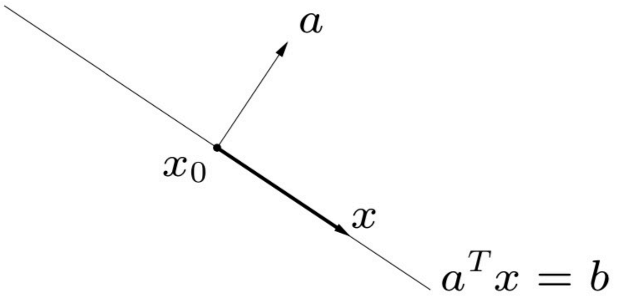


- 超平面是仿射集合和凸集

超平面和半空间

- 超平面

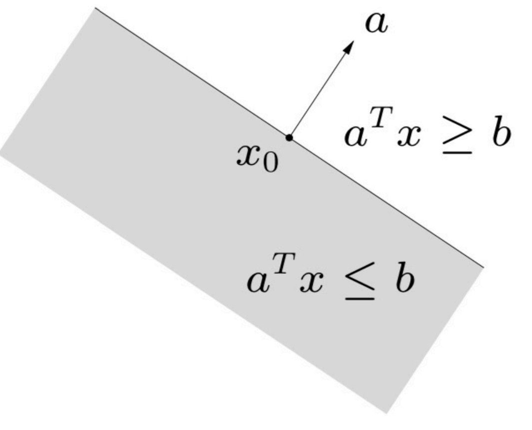
$$\{x \mid a^T x = b\}\ (a \neq 0)$$



- 半空间

$$\{x \mid a^T x \leq b\}\ (a \neq 0)$$

  - a：法向量



  - 超平面是仿射集合和凸集
  - 半空间是凸集

球和椭球

球和椭球

- **(Euclid)**球：x_c为球心，r为半径

球和椭球

- **(Euclid)**球：x_c为球心，r为半径

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

球和椭球

- **(Euclid)**球：x_c为球心，r为半径

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

- 证明：球是凸集

球和椭球

- **(Euclid)**球：x_c为球心，r为半径

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

- 证明：球是凸集

$$\|x_1 - x_c\|_2 \le r \quad \|x_2 - x_c\|_2 \le r \quad 0 \le \theta \le 1$$

球和椭球

- **(Euclid)**球：x_c为球心，r为半径

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

- 证明：球是凸集

$$\|x_1 - x_c\|_2 \le r \quad \|x_2 - x_c\|_2 \le r \quad 0 \le \theta \le 1$$

$$\|\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - x_c\|_2$$

球和椭球

- **(Euclid)**球：x_c为球心，r为半径

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

- 证明：球是凸集

$$\|x_1 - x_c\|_2 \le r \quad \|x_2 - x_c\|_2 \le r \quad 0 \le \theta \le 1$$

$$\begin{aligned} \|\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - x_c\|_2 \\ &= \|\theta(x_1 - x_c) + (1-\theta)(x_2 - x_c)\|_2 \end{aligned}$$

球和椭球

- **(Euclid)**球：x_c为球心，r为半径

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

- 证明：球是凸集

$$\|x_1 - x_c\|_2 \le r \quad \|x_2 - x_c\|_2 \le r \quad 0 \le \theta \le 1$$

$$\begin{aligned} \|\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - x_c\|_2 & \\ &= \|\theta(x_1 - x_c) + (1-\theta)(x_2 - x_c)\|_2 \\ &\le \theta\|x_1 - x_c\|_2 + (1-\theta)\|x_2 - x_c\|_2 \end{aligned}$$

球和椭球

- **(Euclid)球**：x_c为球心，r为半径

$$B(x_c, r) = \{x \mid \|x - x_c\|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

- 证明：球是凸集

$$\|x_1 - x_c\|_2 \le r \quad \|x_2 - x_c\|_2 \le r \quad 0 \le \theta \le 1$$

$$\begin{aligned}
\|\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - x_c\|_2 & \\
&= \|\theta(x_1 - x_c) + (1-\theta)(x_2 - x_c)\|_2 \\
&\le \theta\|x_1 - x_c\|_2 + (1-\theta)\|x_2 - x_c\|_2 \\
&\le r
\end{aligned}$$

椭球

椭球

- 椭球：

$$\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \le 1\}$$

椭球

- 椭球：

$$\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \le 1\}$$

  - 此处：P为对称正定矩阵

椭球

- 椭球：

$$\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \le 1\}$$

  - 此处：P为对称正定矩阵

- 例$\xi = \{x \mid x^T \begin{Bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}^{-1} x \le 1\}$

椭球

- 椭球：

$$\{x \mid (x-x_c)^T P^{-1}(x-x_c) \le 1\}$$

  - 此处：P为对称正定矩阵

- 例$\xi = \{x \mid x^T \begin{Bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}^{-1} x \le 1\}$

- $\xi = \{(x_1, x_2) \mid \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \le 1\}$

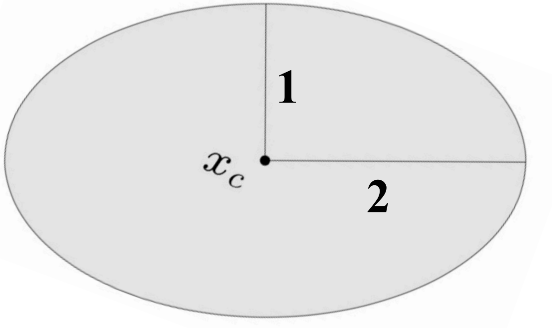
椭球

- 椭球：

$$\{x \mid (x-x_c)^T P^{-1}(x-x_c) \le 1\}$$

  - 此处：P为对称正定矩阵

- 例$\xi = \{x \mid x^T \begin{Bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}^{-1} x \le 1\}$



- $\xi = \{(x_1, x_2) \mid \dfrac{x_1^2}{4} + x_2^2 \le 1\}$

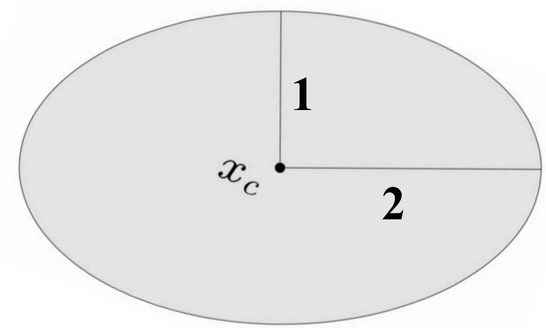
椭球

- 椭球：

$$\{x \mid (x-x_c)^T P^{-1}(x-x_c) \le 1\}$$

  - 此处：P为对称正定矩阵

- 例$\xi = \{x \,|\, x^T \begin{Bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}^{-1} x \le 1\}$



- $\xi = \{(x_1, x_2) \,|\, \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \le 1\}$

- 其他表示：$\{x_c + Au \mid \|u\|_2 \le 1\}$ A非奇异的方阵

范数球和范数锥

范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

$$\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \text{ if and only if } x = 0$$

$$\|tx\| = |t|\,\|x\| \text{ for } t \in \mathbf{R}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

$$\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \text{ if and only if } x = 0$$

$$\|tx\| = |t|\,\|x\| \text{ for } t \in \mathbf{R}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- 范数球：x_c为球心，r为半径

范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

$$\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \text{ if and only if } x = 0$$

$$\|tx\| = |t|\,\|x\| \text{ for } t \in \mathbf{R}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- 范数球：x_c为球心，r为半径

$$\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$$

范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

$$\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \text{ if and only if } x = 0$$

$$\|tx\| = |t|\,\|x\| \text{ for } t \in \mathbf{R}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- 范数球：x_c为球心，r为半径

$$\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$$

- 范数锥：

范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

$$\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \text{ if and only if } x = 0$$

$$\|tx\| = |t|\,\|x\| \text{ for } t \in \mathbf{R}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- 范数球：x_c为球心，r为半径

$$\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$$

- 范数锥：$\{(x, t) \mid \|x\| \leq t\}$

范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

$$\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \text{ if and only if } x = 0$$

$$\|tx\| = |t|\,\|x\| \text{ for } t \in \mathbf{R}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- 范数球：x_c为球心，r为半径

$$\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$$

- 范数锥：$\{(x, t) \mid \|x\| \leq t\}$
- **Euclid**锥为二阶锥

范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

  $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$

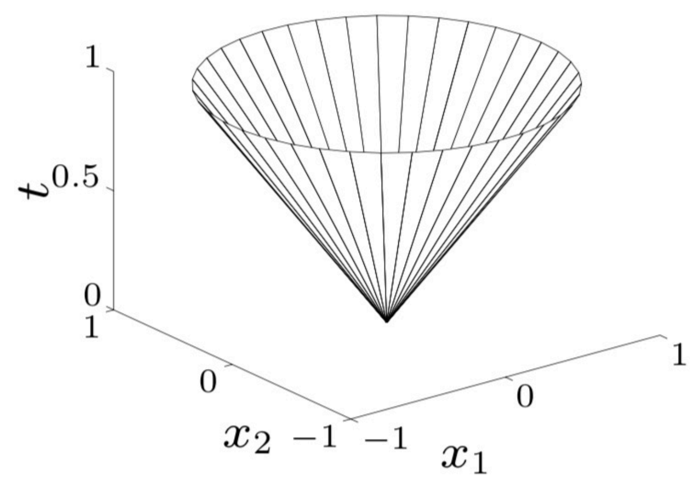
  $\|tx\| = |t| \, \|x\|$ for $t \in \mathbf{R}$

  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- 范数球：x_c为球心，r为半径

  $$\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$$

- 范数锥：$\{(x, t) \mid \|x\| \leq t\}$
- **Euclid**锥为二阶锥



范数球和范数锥

- 范数：满足如下条件的函数

$$\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \text{ if and only if } x = 0$$

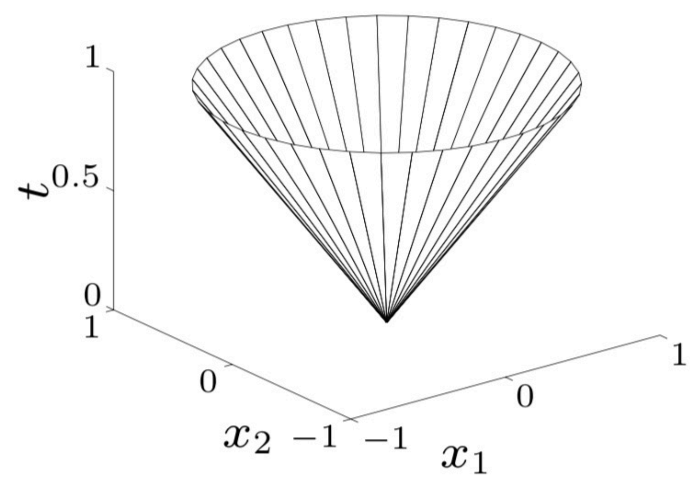
$$\|tx\| = |t|\ \|x\| \text{ for } t \in \mathbf{R}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- 范数球：x_c为球心，r为半径

$$\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$$

- 范数锥：$\{(x, t) \mid \|x\| \leq t\}$
- **Euclid**锥为二阶锥
- 范数球和范数锥均为凸集



多面体

多面体

- 有限个线性等式和不等式的解集：

$$Ax \preceq b, \qquad Cx = d$$

多面体

- 有限个线性等式和不等式的解集：

$$Ax \preceq b, \qquad Cx = d$$

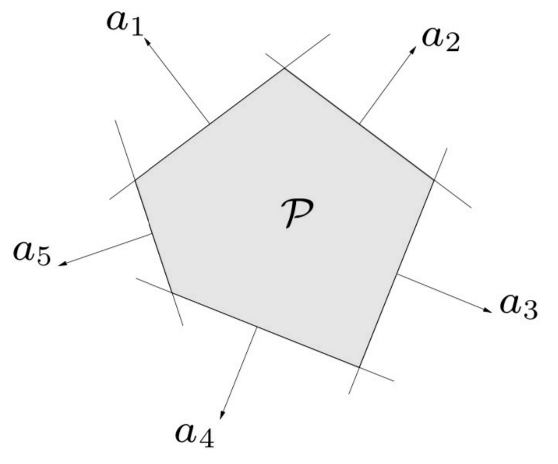
- ($A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$, $\preceq$ 紧凑表达式)

多面体

- 有限个线性等式和不等式的解集：

$$Ax \preceq b, \qquad Cx = d$$

- ($A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$, $\preceq$ 紧凑表达式)

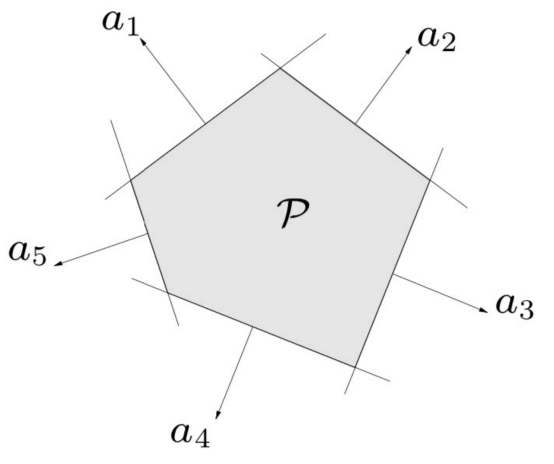


多面体

- 有限个线性等式和不等式的解集：

$$Ax \preceq b, \qquad Cx = d$$

- ($A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$, $\preceq$ 紧凑表达式)



- 多面体是有限个半空间和超平面的交集

单纯形

单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0 \dots v_k$共$k+1$个点，其中$v_1-v_0 \dots v_k-v_0$线性无关，则与上述点相关的单纯形为

单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0\ldots v_k$共k+1个点，其中v_1-$v_0\ldots v_k$-v_0线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C = \mathbf{conv}\{v_0, \ldots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta = 1\}$$

单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0\ldots v_k$共k+1个点，其中v_1-$v_0\ldots v_k$-v_0线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C = \mathbf{conv}\{v_0, \ldots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta = 1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0 \ldots v_k$共k+1个点，其中v_1-$v_0 \ldots v_k$-v_0线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C = \mathbf{conv}\{v_0, \ldots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta = 1\}$$

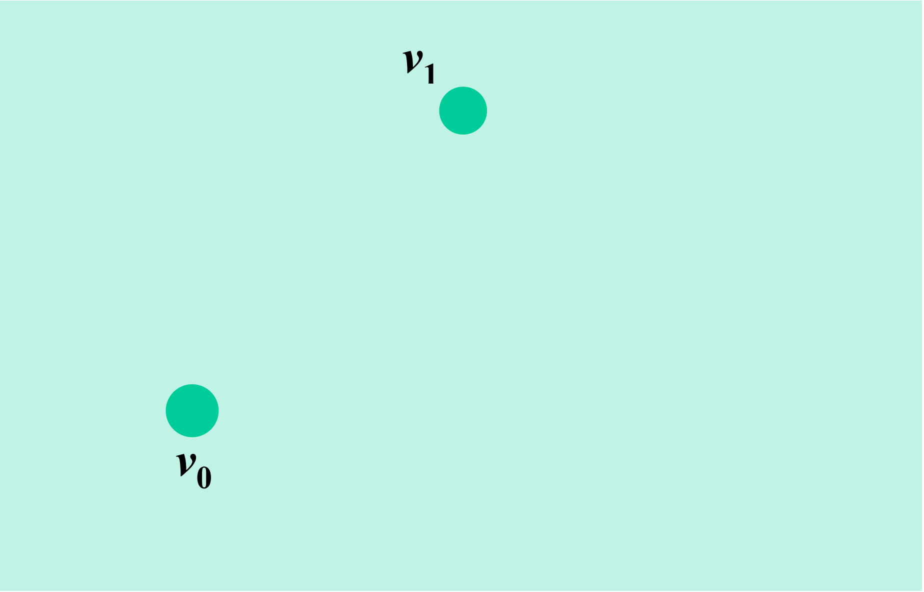
- 例：$\mathbf{R}^2$空间

单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0 \ldots v_k$共$k+1$个点，其中$v_1-v_0 \ldots v_k-v_0$线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C = \mathbf{conv}\{v_0, \ldots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta = 1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

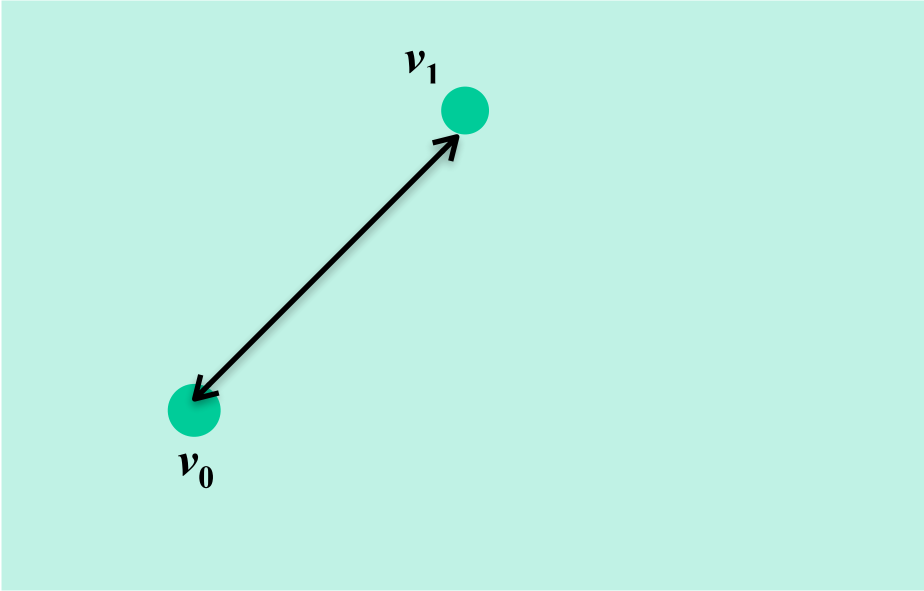


单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0\ldots v_k$共$k+1$个点，其中$v_1-v_0\ldots v_k-v_0$线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C=\mathbf{conv}\{v_0,\ldots,v_k\}=\{\theta_0 v_0+\cdots+\theta_k v_k \mid \theta\succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta=1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

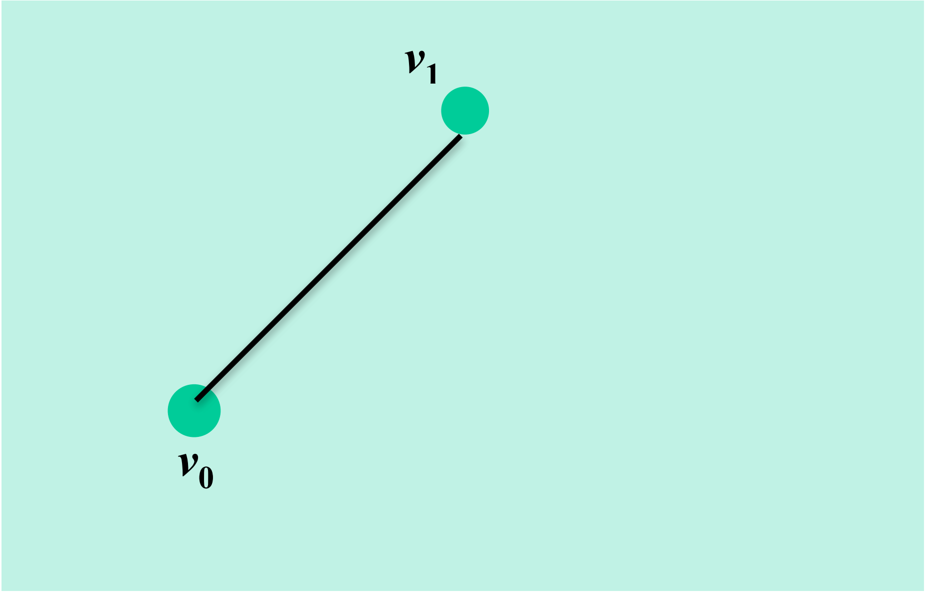


单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0\ldots v_k$共k+1个点，其中v_1-$v_0\ldots v_k$-v_0线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C = \mathbf{conv}\{v_0, \ldots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta = 1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

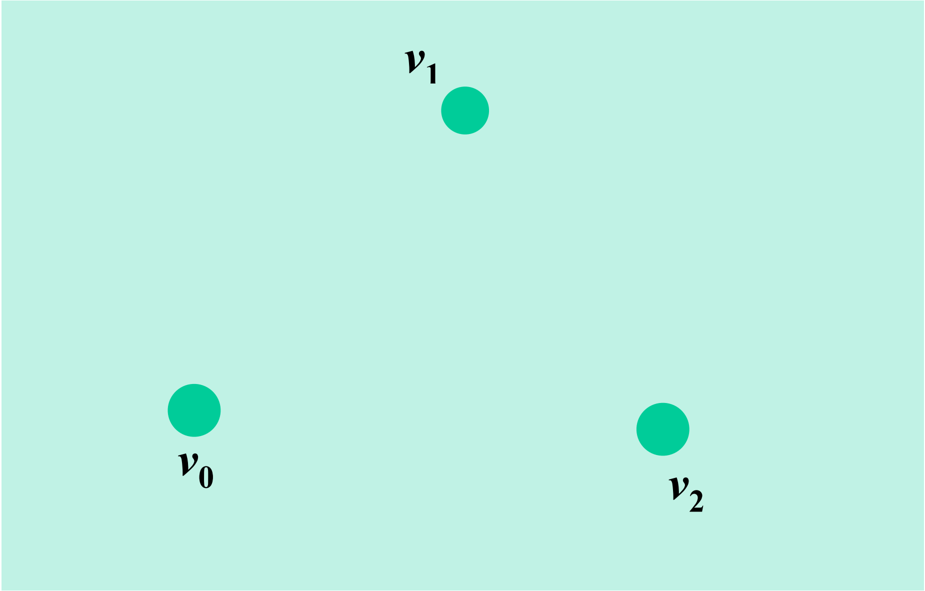


单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0\ldots v_k$共k+1个点，其中$v_1-v_0\ldots v_k-v_0$线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C=\mathbf{conv}\{v_0,\ldots,v_k\}=\{\theta_0 v_0+\cdots+\theta_k v_k \mid \theta\succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta=1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

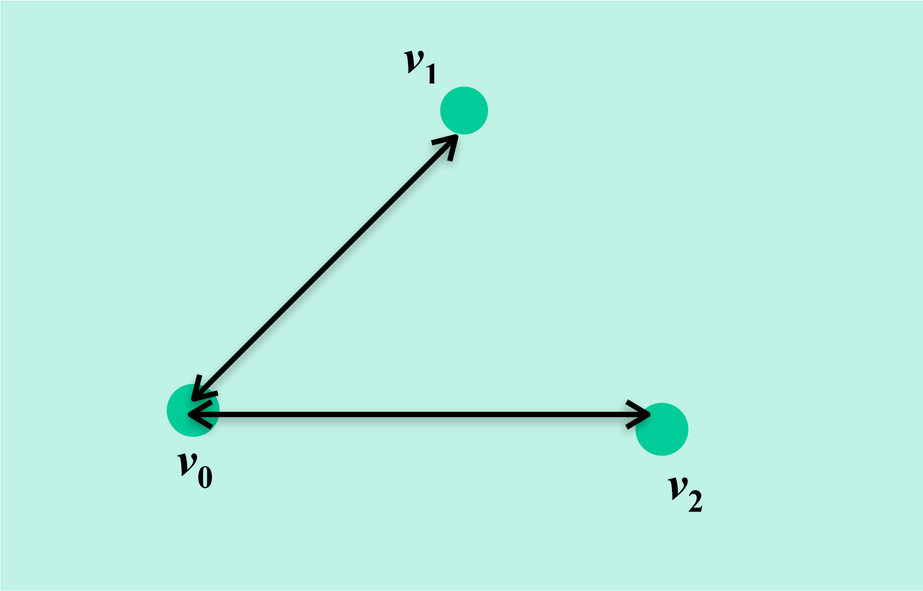


单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0 \ldots v_k$共k+1个点，其中v_1-$v_0 \ldots v_k$-v_0线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C = \mathbf{conv}\{v_0, \ldots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta = 1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

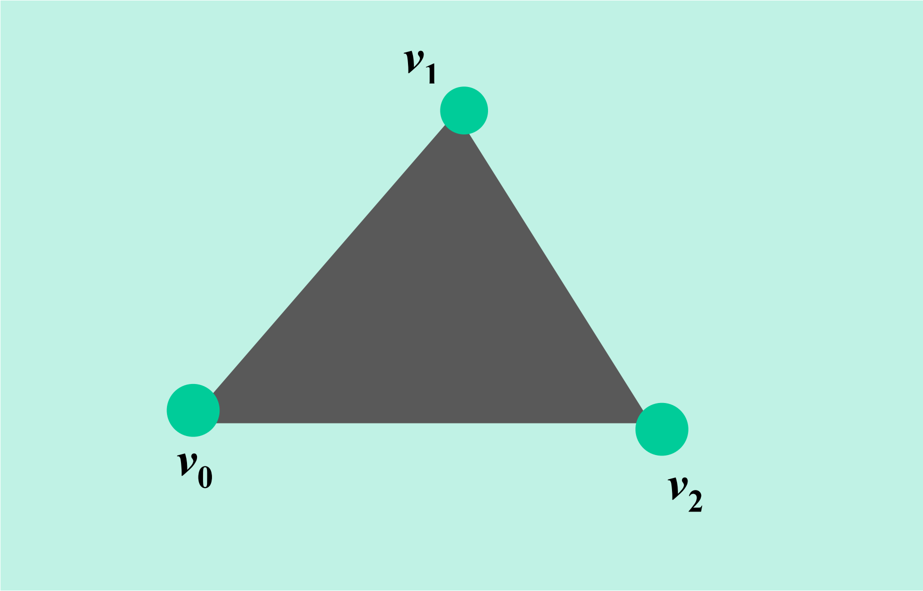


单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0 \ldots v_k$共$k+1$个点，其中$v_1-v_0 \ldots v_k-v_0$线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C = \mathbf{conv}\{v_0, \ldots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0, \ \mathbf{1}^T\theta = 1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

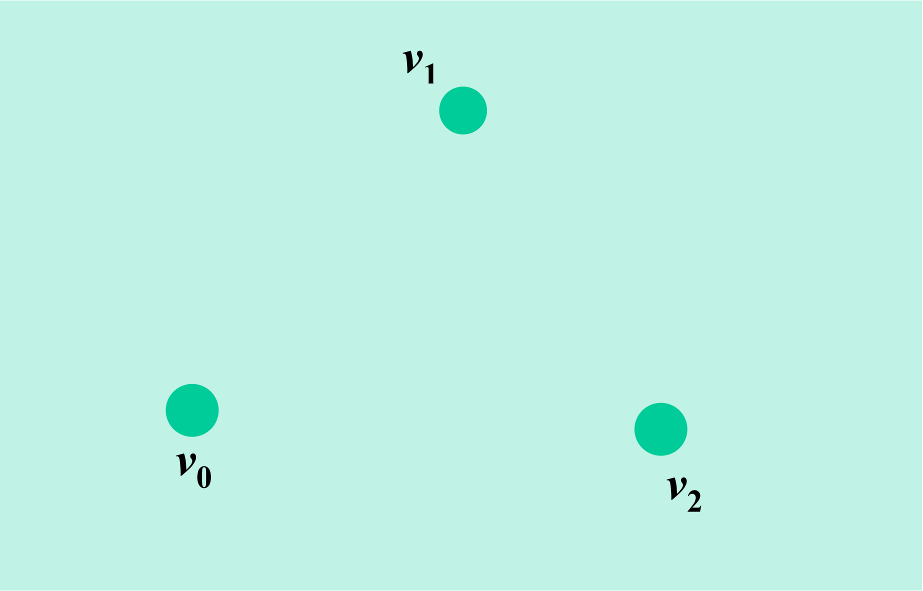


单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0\ldots v_k$共$k+1$个点，其中$v_1-v_0\ldots v_k-v_0$线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C=\mathbf{conv}\{v_0,\ldots,v_k\}=\{\theta_0 v_0+\cdots+\theta_k v_k \mid \theta\succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta=1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

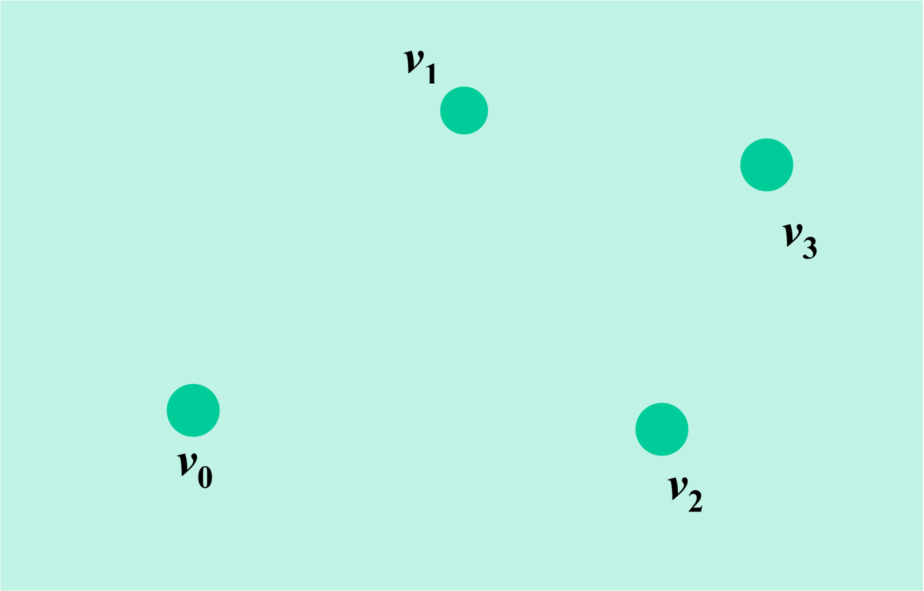


单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0 \ldots v_k$共$k+1$个点，其中$v_1-v_0 \ldots v_k-v_0$线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C=\mathbf{conv}\{v_0,\ldots,v_k\}=\{\theta_0 v_0+\cdots+\theta_k v_k \mid \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta=1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间

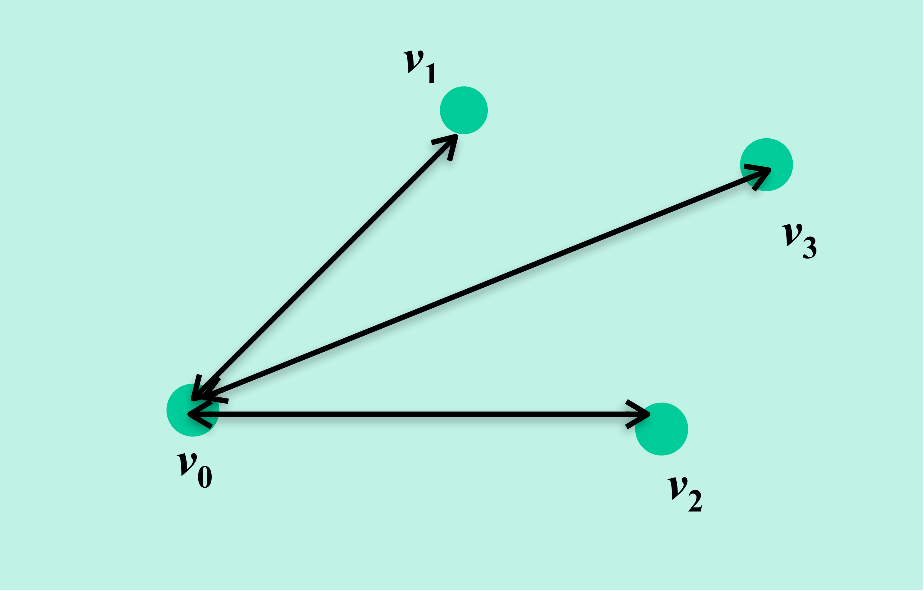


单纯形

- $\mathbf{R}^n$空间中选择$v_0 \ldots v_k$共$k+1$个点，其中$v_1 - v_0 \ldots v_k - v_0$线性无关，则与上述点相关的单纯形为

$$C = \mathbf{conv}\{v_0, \ldots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0,\ \mathbf{1}^T\theta = 1\}$$

- 例：$\mathbf{R}^2$空间



半正定锥

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$对称半正定矩阵集合

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n=\{X\in\mathbf{S}^n \mid X\succeq 0\}$对称半正定矩阵集合
- $\mathbf{S}_{++}^n=\{X\in\mathbf{S}^n \mid X\succ 0\}$对称正定矩阵集合

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n=\{X\in\mathbf{S}^n \mid X\succeq 0\}$对称半正定矩阵集合
- $\mathbf{S}_{++}^n=\{X\in\mathbf{S}^n \mid X\succ 0\}$对称正定矩阵集合
- 证明：$\mathbf{S}_+^n$是凸锥

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$对称半正定矩阵集合
- $\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$对称正定矩阵集合
- 证明：$\mathbf{S}_+^n$是凸锥
  - 等价：若 $\theta_1, \theta_2 \geq 0$且 $A,\ B \in \mathbf{S}_+^n,\ \theta_1 A + \theta_2 B \in \mathbf{S}_+^n$

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$对称半正定矩阵集合
- $\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$对称正定矩阵集合
- 证明：$\mathbf{S}_+^n$是凸锥
  - 等价：若 $\theta_1, \theta_2 \geq 0$且 $A, B \in \mathbf{S}_+^n$, $\theta_1 A + \theta_2 B \in \mathbf{S}_+^n$
  - 半正定矩阵A：对任意n维向量x，有$x^T A x \geq \mathbf{0}$

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$对称半正定矩阵集合
- $\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$对称正定矩阵集合
- 证明 : $\mathbf{S}_+^n$是凸锥
  - 等价：若$\theta_1, \theta_2 \geq 0$且 $A, B \in \mathbf{S}_+^n$, $\theta_1 A + \theta_2 B \in \mathbf{S}_+^n$
  - 半正定矩阵A：对任意n维向量x，有$x^T A x \geq \mathbf{0}$
  - 则有$x^T A x \geq \mathbf{0}$， $x^T B x \geq \mathbf{0}$

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$对称半正定矩阵集合
- $\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$对称正定矩阵集合
- 证明：$\mathbf{S}_+^n$是凸锥
  - 等价：若$\theta_1, \theta_2 \geq 0$且 A, $B \in \mathbf{S}_+^n$, $\theta_1 A + \theta_2 B \in \mathbf{S}_+^n$
  - 半正定矩阵A：对任意n维向量x，有$x^T A x \geq 0$
  - 则有$x^T A x \geq 0$， $x^T B x \geq 0$

$$x^T(\theta_1 A + \theta_2 B)x$$

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$对称半正定矩阵集合
- $\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$对称正定矩阵集合
- 证明：$\mathbf{S}_+^n$是凸锥
  - 等价：若 $\theta_1, \theta_2 \geq 0$且 $A,\ B \in \mathbf{S}_+^n,\ \theta_1 A + \theta_2 B \in \mathbf{S}_+^n$
  - 半正定矩阵A：对任意n维向量x，有$x^T A x \geq \mathbf{0}$
  - 则有$x^T A x \geq \mathbf{0}$， $x^T B x \geq \mathbf{0}$

$$x^T(\theta_1 A + \theta_2 B)x = \theta_1 x^T A x + \theta_2 x^T B x$$

半正定锥

- $\mathbf{S}^n$是n阶对称矩阵集合
- $\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\}$对称半正定矩阵集合
- $\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}$对称正定矩阵集合
- 证明：$\mathbf{S}_+^n$是凸锥
  - 等价：若$\theta_1, \theta_2 \geq 0$且 A, $B \in \mathbf{S}_+^n$, $\theta_1 A + \theta_2 B \in \mathbf{S}_+^n$
  - 半正定矩阵A：对任意n维向量x，有$x^T A x \geq 0$
  - 则有$x^T A x \geq 0$， $x^T B x \geq 0$

$$x^T(\theta_1 A + \theta_2 B)x = \theta_1 x^T A x + \theta_2 x^T B x$$
$$\geq 0$$

半正定锥

半正定锥

- n=1时

半正定锥

- n=1时
  - 对称矩阵集合是实数集

半正定锥

- n=1时
  - 对称矩阵集合是实数集
  - 对称半正定矩阵为非负实数集

半正定锥

- n=1时
  - 对称矩阵集合是实数集
  - 对称半正定矩阵为非负实数集
  - 对称正定矩阵为正实数集

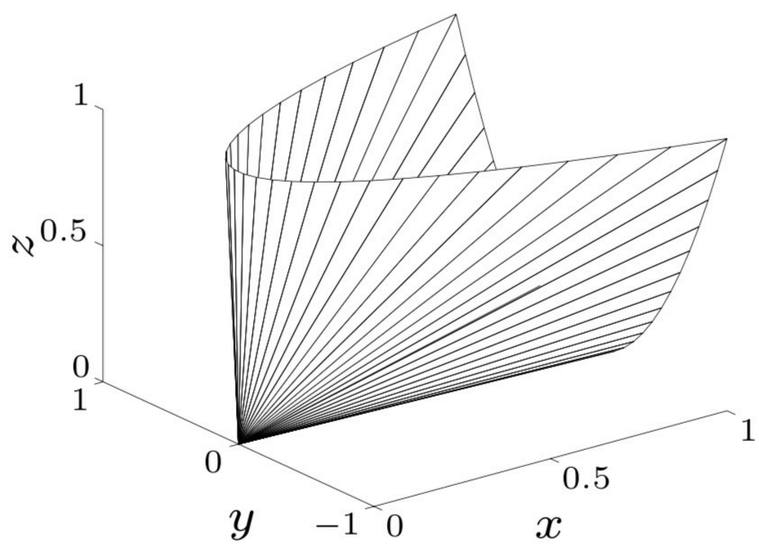
半正定锥

- n=1时
  - 对称矩阵集合是实数集
  - 对称半正定矩阵为非负实数集
  - 对称正定矩阵为正实数集
- n=2时

半正定锥

- n=1时
  - 对称矩阵集合是实数集
  - 对称半正定矩阵为非负实数集
  - 对称正定矩阵为正实数集
- n=2时

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathbf{S}_+^2$$



保凸运算

保凸运算

- 如何确定集合C是否凸集?

保凸运算

- 如何确定集合C是否凸集?
- 方式**1:**运用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

保凸运算

- 如何确定集合C是否凸集?
- 方式**1:**运用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

- 方式**2:**是否可通过对一些简单的凸集**(**超平面、半空间、范数球等**)**进行保凸运算获取集合C?

保凸运算

- 如何确定集合C是否凸集?
- 方式**1:**运用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$

- 方式**2:**是否可通过对一些简单的凸集**(**超平面、半空间、范数球等**)**进行保凸运算获取集合C?
  - 交集

保凸运算

- 如何确定集合C是否凸集?
- 方式**1:**运用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

- 方式**2:**是否可通过对一些简单的凸集**(**超平面、半空间、范数球等**)**进行保凸运算获取集合C?
  - 交集
  - 仿射函数

保凸运算

- 如何确定集合C是否凸集?
- 方式**1:**运用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

- 方式**2:**是否可通过对一些简单的凸集**(**超平面、半空间、范数球等**)**进行保凸运算获取集合C?
  - 交集
  - 仿射函数
  - 透视函数

保凸运算

- 如何确定集合C是否凸集?
- 方式**1**:运用定义

$$x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in C$$

- 方式**2**:是否可通过对一些简单的凸集(超平面、半空间、范数球等)进行保凸运算获取集合C?
  - 交集
  - 仿射函数
  - 透视函数
  - 线性分式

交集

交集

- 任意数目的凸集的交集仍为凸集

交集

- 任意数目的凸集的交集仍为凸集
- 例：

交集

- 任意数目的凸集的交集仍为凸集
- 例：

$$S = \{x \in \mathbf{R}^m \mid |p(t)| \leq 1 \text{ for } |t| \leq \pi/3\}$$

交集

- 任意数目的凸集的交集仍为凸集
- 例：

$$S = \{x \in \mathbf{R}^m \mid |p(t)| \le 1 \text{ for } |t| \le \pi/3\}$$

- 此处：

交集

- 任意数目的凸集的交集仍为凸集
- 例：

$$S=\{x\in\mathbf{R}^m \mid |p(t)|\le 1 \text{ for } |t|\le\pi/3\}$$

- 此处： $p(t)=x_1\cos t+x_2\cos 2t+\cdots+x_m\cos mt$

交集

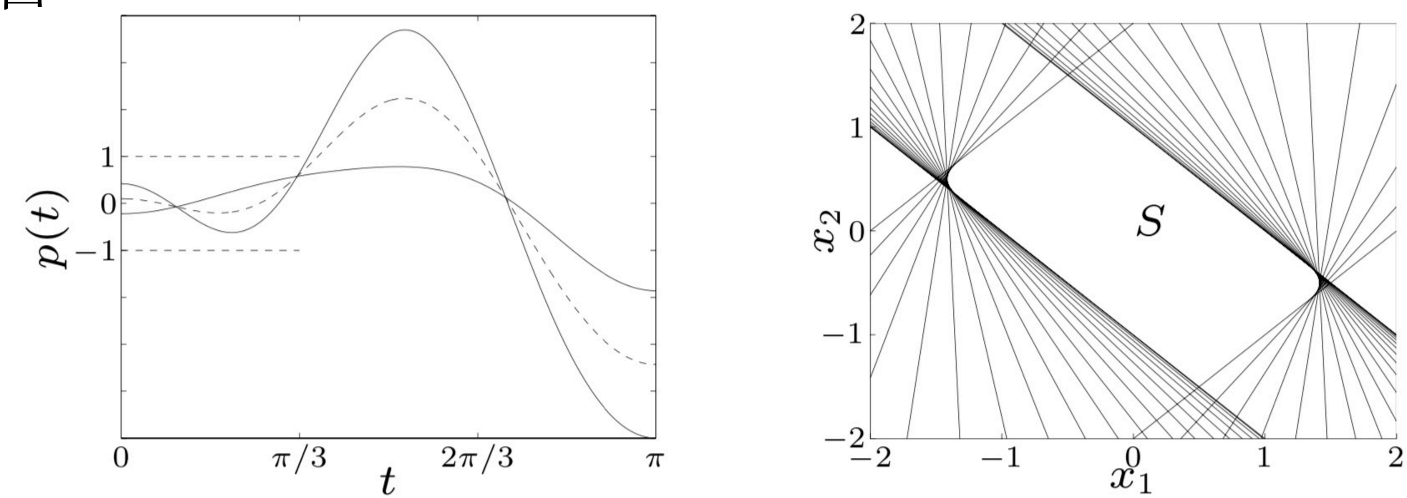
- 任意数目的凸集的交集仍为凸集
- 例：
$$S=\{x\in\mathbf{R}^m \mid |p(t)|\le 1 \text{ for } |t|\le \pi/3\}$$
- 此处： $p(t)=x_1\cos t+x_2\cos 2t+\cdots+x_m\cos mt$
- 若$m = 2$：

交集

- 任意数目的凸集的交集仍为凸集
- 例：

$$S=\{x\in\mathbf{R}^m \mid |p(t)|\le 1 \text{ for } |t|\le \pi/3\}$$

- 此处： $p(t)=x_1\cos t+x_2\cos 2t+\cdots+x_m\cos mt$
- 若m = **2**：



仿射函数

仿射函数

- 设函数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 为仿射函数，即 $f(x) = Ax + b$ 其中

$$A \in \mathbf{R}^{m \times n},\ b \in \mathbf{R}^m$$

仿射函数

- 设函数 $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为仿射函数，即 $f(x) = Ax + b$ 其中

$$A \in \mathbf{R}^{m \times n},\ b \in \mathbf{R}^m$$

- 则凸集在函数f下的象为凸集

仿射函数

- 设函数$f:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^m$为仿射函数，即$f(x)=Ax+b$　其中

$$A\in\mathbf{R}^{m\times n},\ b\in\mathbf{R}^m$$

- 则凸集在函数f下的象为凸集

$$S\subseteq\mathbf{R}^n\ \text{为凸}\quad\Longrightarrow\quad f(S)=\{f(x)\mid x\in S\}\ \text{为凸}$$

仿射函数

- 设函数 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 为仿射函数，即 $f(x)=Ax+b$ 其中

$$A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ b \in \mathbf{R}^m$$

- 则凸集在函数f下的象为凸集

$$S \subseteq \mathbf{R}^n \ \text{为凸} \quad \Longrightarrow \quad f(S)=\{f(x)\mid x\in S\} \ \text{为凸}$$

- 类似的，凸集在函数f下的原象为凸集

仿射函数

- 设函数 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 为仿射函数，即 $f(x)=Ax+b$ 其中

$$A\in\mathbf{R}^{m\times n},\ b\in\mathbf{R}^m$$

- 则凸集在函数 f 下的象为凸集

$$S\subseteq\mathbf{R}^n \text{ 为凸} \quad\Longrightarrow\quad f(S)=\{f(x)\mid x\in S\} \text{ 为凸}$$

- 类似的，凸集在函数 f 下的原象为凸集

$$C\subseteq\mathbf{R}^m \text{ 为凸} \quad\Longrightarrow\quad f^{-1}(C)=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\in C\} \text{ 为凸}$$

仿射函数

- 设函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为仿射函数，即 $f(x)=Ax+b$ 其中

$$A\in\mathbf{R}^{m\times n},\ b\in\mathbf{R}^m$$

- 则凸集在函数f下的象为凸集

$$S\subseteq\mathbf{R}^n\ \text{为凸}\quad\Longrightarrow\quad f(S)=\{f(x)\mid x\in S\}\ \text{为凸}$$

- 类似的，凸集在函数f下的原象为凸集

$$C\subseteq\mathbf{R}^m\ \text{为凸}\quad\Longrightarrow\quad f^{-1}(C)=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\in C\}\ \text{为凸}$$

- 例：

仿射函数

- 设函数$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$为仿射函数，即$f(x)=Ax+b$ 其中

$$A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ b \in \mathbf{R}^m$$

- 则凸集在函数f下的象为凸集

$$S \subseteq \mathbf{R}^n \quad \text{为凸} \quad \Longrightarrow \quad f(S)=\{f(x) \mid x \in S\} \quad \text{为凸}$$

- 类似的，凸集在函数f下的原象为凸集

$$C \subseteq \mathbf{R}^m \quad \text{为凸} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(C)=\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \in C\} \quad \text{为凸}$$

- 例：
  - 缩放 $\alpha S=\{\alpha x \mid x \in S\}$

仿射函数

- 设函数$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$为仿射函数，即$f(x)=Ax+b$ 其中

$$A\in\mathbf{R}^{m\times n},\ b\in\mathbf{R}^m$$

- 则凸集在函数f下的象为凸集

$$S\subseteq\mathbf{R}^n\ \text{为凸}\quad\Longrightarrow\quad f(S)=\{f(x)\mid x\in S\}\ \text{为凸}$$

- 类似的，凸集在函数f下的原象为凸集

$$C\subseteq\mathbf{R}^m\ \text{为凸}\quad\Longrightarrow\quad f^{-1}(C)=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\in C\}\ \text{为凸}$$

- 例：
  - 缩放 $\alpha S=\{\alpha x\mid x\in S\}$
  - 平移 $S+a=\{x+a\mid x\in S\}$

仿射函数

- 设函数$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$为仿射函数，即$f(x)=Ax+b$ 其中

$$A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ b \in \mathbf{R}^m$$

- 则凸集在函数f下的象为凸集

$$S \subseteq \mathbf{R}^n \text{ 为凸} \quad \Longrightarrow \quad f(S)=\{f(x) \mid x \in S\} \text{ 为凸}$$

- 类似的，凸集在函数f下的原象为凸集

$$C \subseteq \mathbf{R}^m \text{ 为凸} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(C)=\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \in C\} \text{ 为凸}$$

- 例：
  - 缩放 $\alpha S=\{\alpha x \mid x \in S\}$
  - 平移 $S+a=\{x+a \mid x \in S\}$
  - 投影 $T=\{x_1 \in \mathbf{R}^m \mid (x_1,x_2) \in S \text{ for some } x_2 \in \mathbf{R}^n\}$

仿射函数

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$$

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

- 线性矩阵不等式的解 $A_i, B \in \mathbf{S}^p$

$$\{x \mid x_1 A_1 + \cdots + x_m A_m \preceq B\}$$

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

- 线性矩阵不等式的解 $A_i, B \in \mathbf{S}^p$

$$\{x \mid x_1 A_1 + \cdots + x_m A_m \preceq B\}$$

$$A(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preceq B$$

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

- 线性矩阵不等式的解 $A_i, B \in \mathbf{S}^p$

$$\{x \mid x_1 A_1 + \cdots + x_m A_m \preceq B\}$$

$$A(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preceq B$$

$$f(x) = B - A(x)$$

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

- 线性矩阵不等式的解 $A_i, B \in \mathbf{S}^p$

$$\{x \mid x_1 A_1 + \cdots + x_m A_m \preceq B\}$$

$$A(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preceq B$$

$$f(x) = B - A(x) \quad f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{S}^m$$

仿射函数

- 两个凸集的和是凸的：

$$S_1 + S_2 = \{x + y \mid x \in S_1,\ y \in S_2\}$$

$$S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

- 线性矩阵不等式的解 $A_i, B \in \mathbf{S}^p$

$$\{x \mid x_1 A_1 + \cdots + x_m A_m \preceq B\}$$

$$A(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preceq B$$

$$f(x) = B - A(x) \qquad f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{S}^m$$

$$f(x) \in \mathbf{S}_+^n$$

仿射函数

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \le 1\}$$

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \leq 1\} \; P \in \mathbf{S}^n_{++}$$

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \leq 1\} \; P \in \mathbf{S}^n_{++}$$

$$\{u \mid \|u\|_2 \leq 1\}$$

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \le 1\} \; P \in \mathbf{S}^n_{++}$$

$$\{u \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

$$f(u) = P^{1/2}u + x_c$$

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \le 1\} \quad P \in \mathbf{S}_{++}^n$$

$$\{u \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

$$f(u) = P^{1/2}u + x_c$$

$$\{f(u) \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \leq 1\} \quad P \in \mathbf{S}_{++}^n$$

$$\{u \mid \|u\|_2 \leq 1\}$$

$$f(u) = P^{1/2}u + x_c$$

$$\{f(u) \mid \|u\|_2 \leq 1\}$$

$$= \{P^{1/2}u + x_c \mid \|u\|_2 \leq 1\} \quad \text{令} x = P^{1/2}u + x_c$$

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \le 1\} \quad P \in \mathbf{S}^n_{++}$$

$$\{u \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

$$f(u) = P^{1/2}u + x_c$$

$$\begin{aligned}
&\{f(u) \mid \|u\|_2 \le 1\} \\
= \; &\{P^{1/2}u + x_c \mid \|u\|_2 \le 1\} \quad \text{令} x = P^{1/2}u + x_c \\
= \; &\{x \mid \|P^{-1/2}(x - x_c)\|_2 \le 1\}
\end{aligned}$$

仿射函数

- 椭球是球的仿射映射

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x-x_c)^T P^{-1}(x-x_c) \le 1\} \quad P \in \mathbf{S}_{++}^n$$

$$\{u \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

$$f(u) = P^{1/2}u + x_c$$

$$\begin{aligned}
&\{f(u) \mid \|u\|_2 \le 1\} \\
= \ &\{P^{1/2}u + x_c \mid \|u\|_2 \le 1\} \quad \text{令} x = P^{1/2}u + x_c \\
= \ &\{x \mid \|P^{-1/2}(x-x_c)\|_2 \le 1\} \\
= \ &\{x \mid (x-x_c)^T P^{-1}(x-x_c) \le 1\}
\end{aligned}$$

透视函数

透视函数

- 透视函数 $P : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$

透视函数

- 透视函数 $P : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$

$$P(x,t) = x/t, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

透视函数

- 透视函数 $P : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n}$

$$P(x,t) = x/t, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

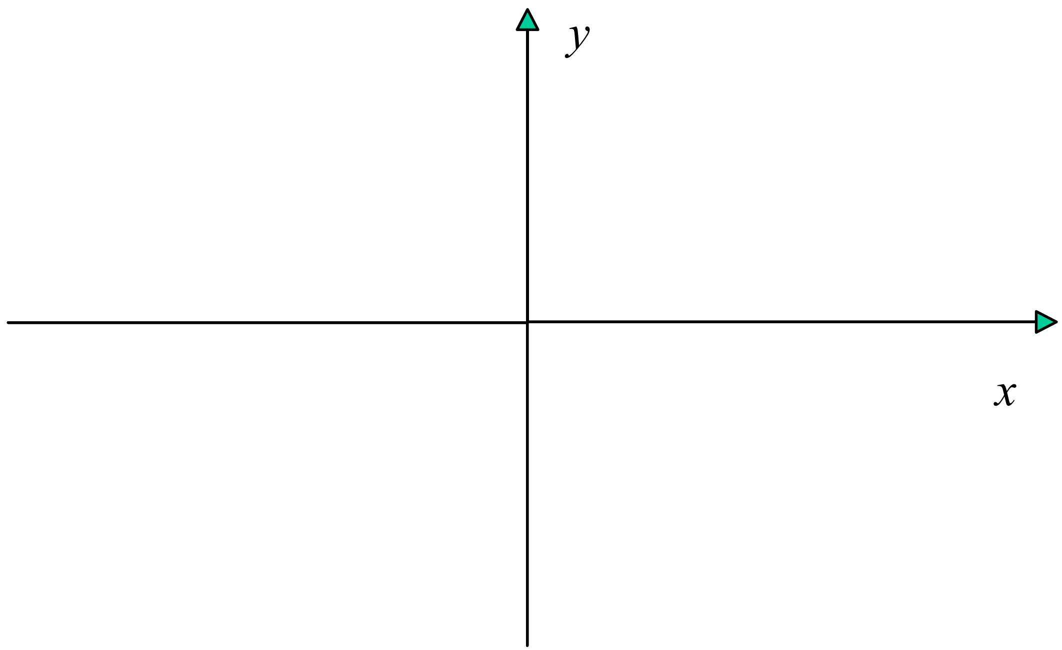
- 凸集在透视函数下的象和原象均为凸集

透视函数

- 透视函数 $P : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$

$$P(x,t) = x/t, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

- 凸集在透视函数下的象和原象均为凸集

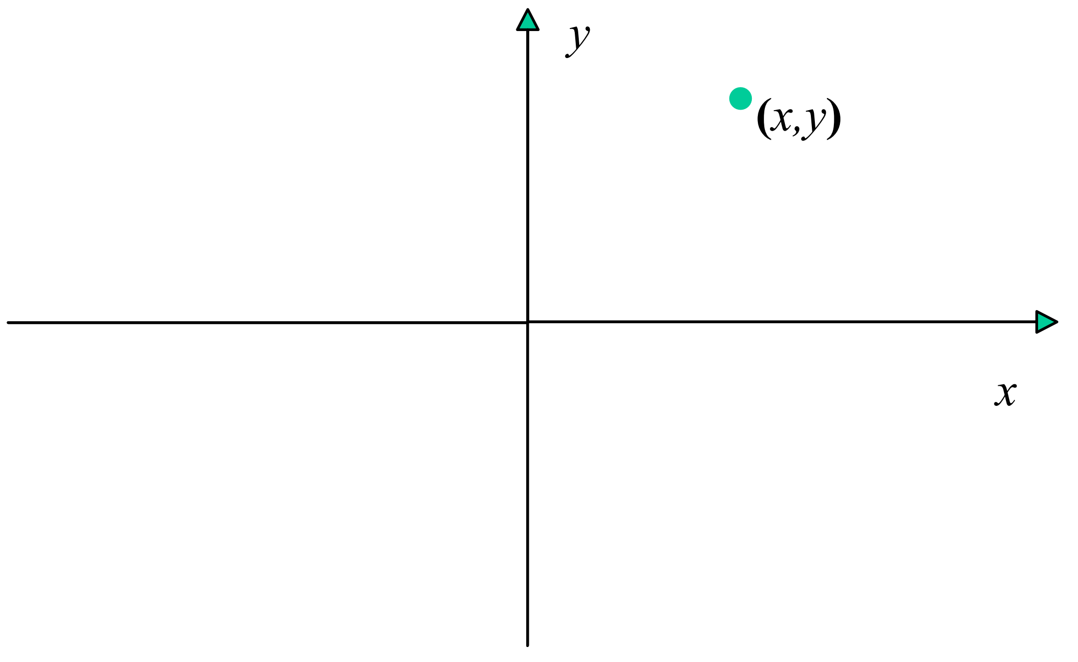


透视函数

- 透视函数 $P: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$

$$P(x,t) = x/t, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

- 凸集在透视函数下的象和原象均为凸集

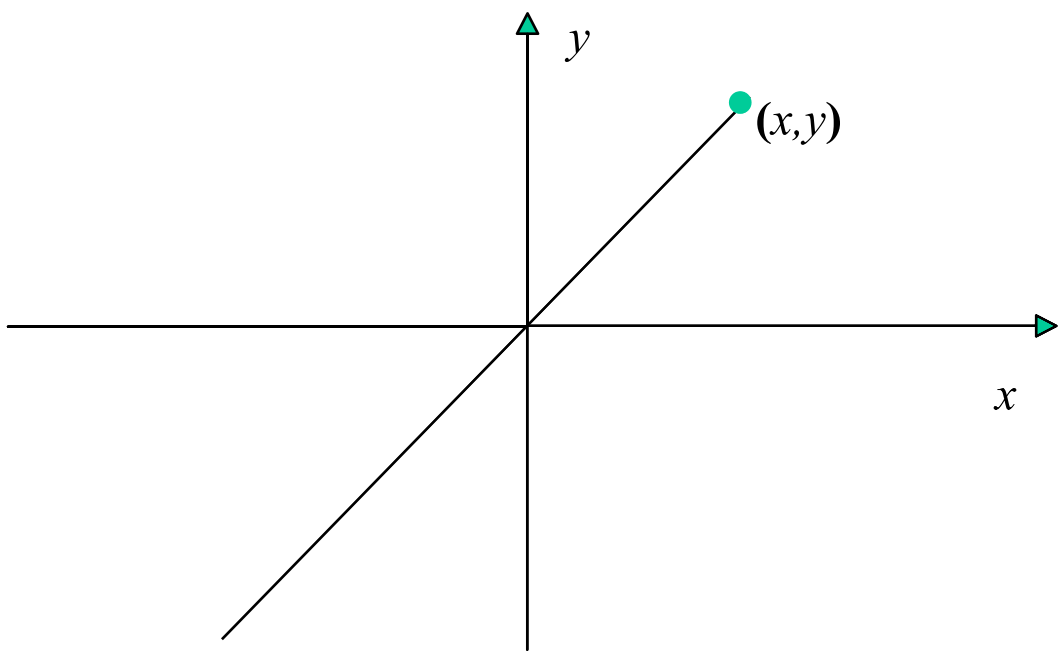


透视函数

- 透视函数 $P : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$P(x,t) = x/t, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

- 凸集在透视函数下的象和原象均为凸集

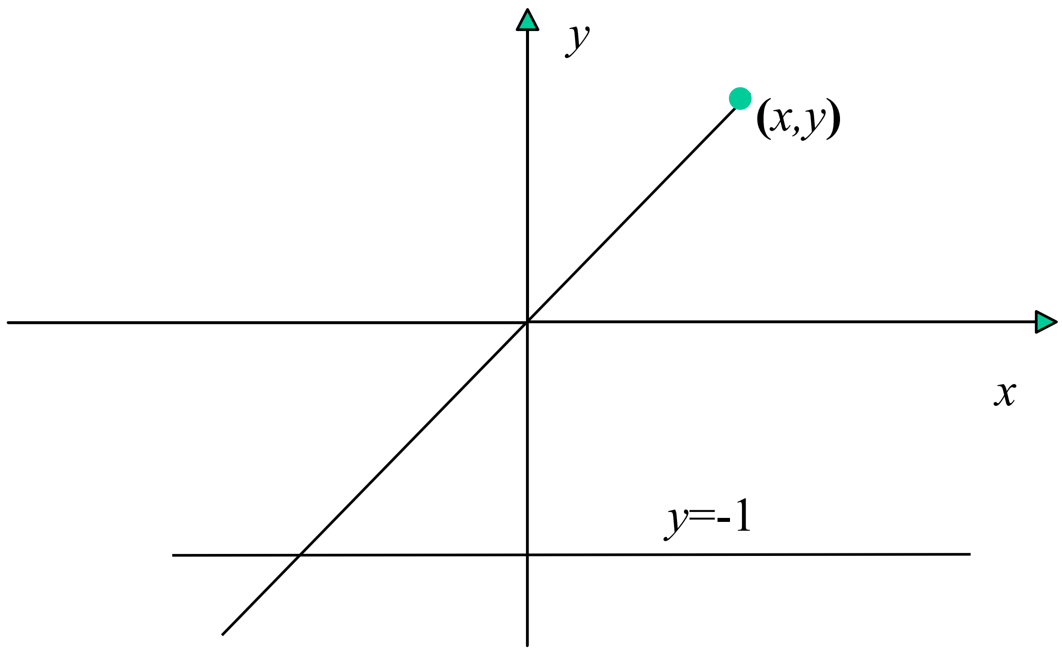


透视函数

- 透视函数 $P : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$

$$P(x,t) = x/t, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

- 凸集在透视函数下的象和原象均为凸集

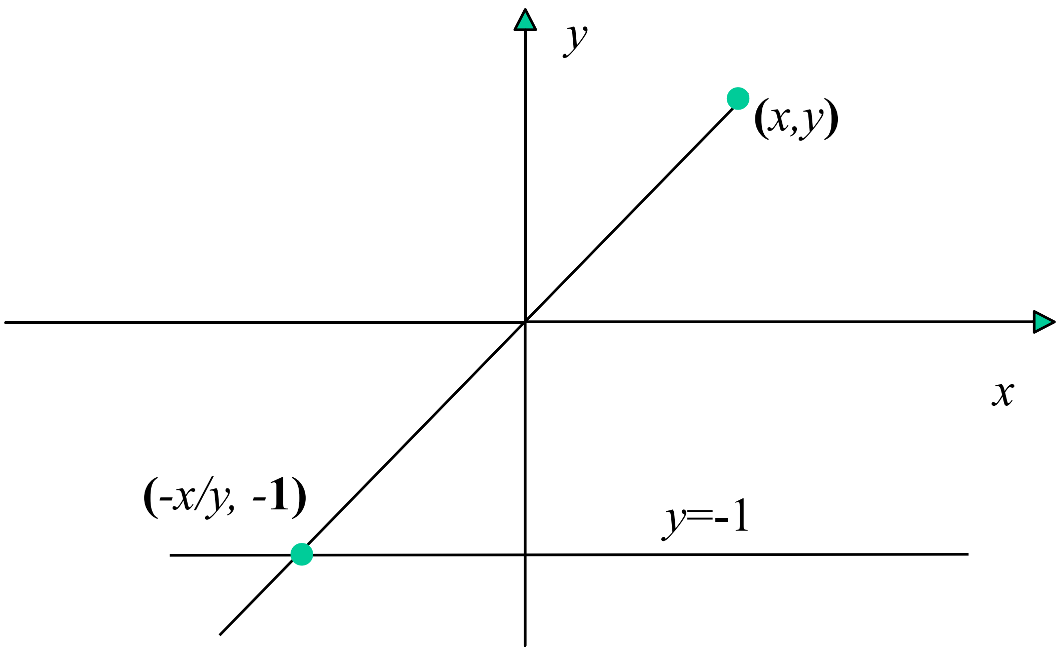


透视函数

- 透视函数 $P : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$

$$P(x,t) = x/t, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

- 凸集在透视函数下的象和原象均为凸集

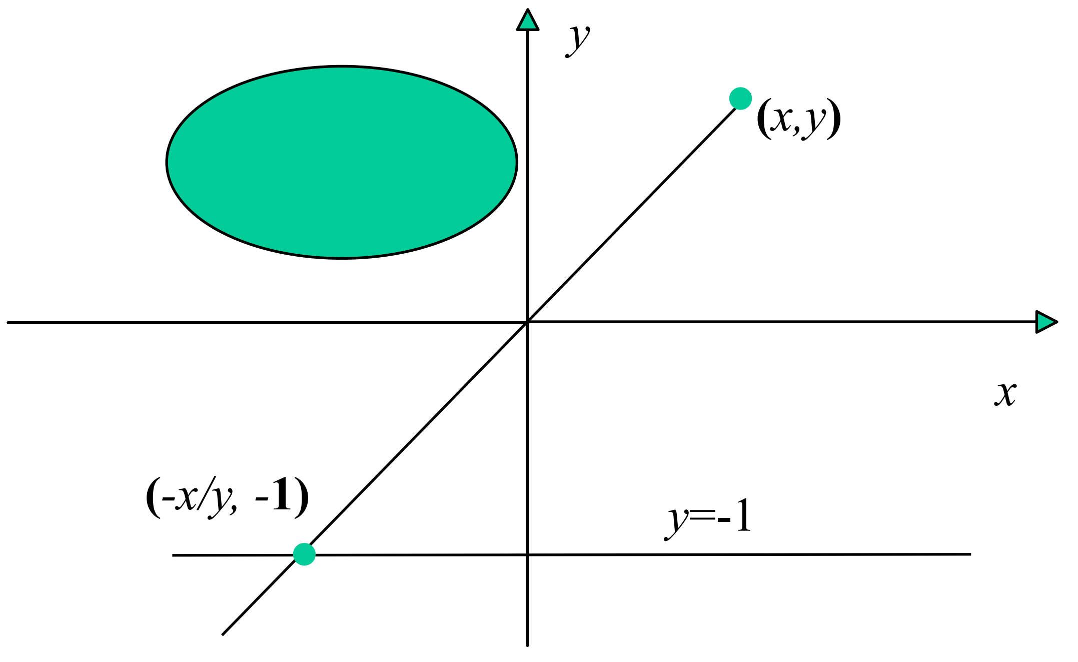


透视函数

- 透视函数 $P : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$P(x,t) = x/t, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

- 凸集在透视函数下的象和原象均为凸集



透视函数

透视函数

- 考虑R^{n+1}内线段，起点为$X=(x, x_{n+1})$, $Y=(y, y_{n+1})$

透视函数

- 考虑R^{n+1}内线段，起点为$X=(x, x_{n+1})$, $Y=(y, y_{n+1})$
- 线段表达式：$0 \le \theta \le 1$，$\theta X + (1-\theta)Y$

透视函数

- 考虑R^{n+1}内线段，起点为$X=(x, x_{n+1})$, $Y=(y, y_{n+1})$
- 线段表达式：$0 \le \theta \le 1$，$\theta X + (1-\theta)Y$
- 证明：透视函数P变换下仍为线段

透视函数

- 考虑R^{n+1}内线段，起点为$X=(x, x_{n+1})$, $Y=(y, y_{n+1})$
- 线段表达式：$0 \le \theta \le 1$，$\theta X + (1-\theta)Y$
- 证明：透视函数P变换下仍为线段
- 考虑点X和Y的凸组合及其透视函数变换

透视函数

- 考虑R^{n+1}内线段，起点为$X=(x, x_{n+1})$, $Y=(y, y_{n+1})$
- 线段表达式：$0 \le \theta \le 1$，$\theta X + (1-\theta)Y$
- 证明：透视函数P变换下仍为线段
- 考虑点X和Y的凸组合及其透视函数变换
- $$P(\theta X + (1-\theta)Y) = \frac{\theta x + (1-\theta)y}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}}$$

透视函数

- 考虑R^{n+1}内线段，起点为$X=(x, x_{n+1})$, $Y=(y, y_{n+1})$
- 线段表达式：$0 \le \theta \le 1$，$\theta X + (1-\theta)Y$
- 证明：透视函数P变换下仍为线段
- 考虑点X和Y的凸组合及其透视函数变换
- $$P(\theta X + (1-\theta)Y) = \frac{\theta x + (1-\theta)y}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}}$$

$$= \frac{\theta x_{n+1}}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}} \frac{x}{x_{n+1}} + \frac{\theta y_{n+1}}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}} \frac{y}{y_{n+1}}$$

透视函数

- 考虑R^{n+1}内线段，起点为$X=(x, x_{n+1})$, $Y=(y, y_{n+1})$
- 线段表达式：$0 \le \theta \le 1$，$\theta X + (1-\theta)Y$
- 证明：透视函数P变换下仍为线段
- 考虑点X和Y的凸组合及其透视函数变换
- $P(\theta X + (1-\theta)Y) = \dfrac{\theta x + (1-\theta)y}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}}$

$$= \frac{\theta x_{n+1}}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}} \frac{x}{x_{n+1}} + \frac{\theta y_{n+1}}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}} \frac{y}{y_{n+1}}$$

$$= \mu P(X) + (1-\mu) P(Y)$$

透视函数

- 考虑R^{n+1}内线段，起点为$X=(x, x_{n+1})$, $Y=(y, y_{n+1})$
- 线段表达式：$0 \le \theta \le 1$，$\theta X + (1-\theta)Y$
- 证明：透视函数P变换下仍为线段
- 考虑点X和Y的凸组合及其透视函数变换
- $$P(\theta X + (1-\theta)Y) = \frac{\theta x + (1-\theta)y}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}}$$

$$= \frac{\theta x_{n+1}}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}} \frac{x}{x_{n+1}} + \frac{\theta y_{n+1}}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}} \frac{y}{y_{n+1}}$$

$$= \mu \qquad P(X) + \qquad (1-\mu) \qquad P(Y)$$

$$0 \le \mu \le 1$$

透视函数

透视函数

- 证明：凸集C在透视函数下的原象为凸集

透视函数

- 证明：凸集C在透视函数下的原象为凸集

$$P^{-1}(C)=\{(x,t)\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x/t\in C,\ t>0\}$$

透视函数

- 证明：凸集C在透视函数下的原象为凸集

$$P^{-1}(C) = \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x/t \in C,\ t > 0\}$$

- 考虑 $(x,t) \in P^{-1}(C)$ $(y,s) \in P^{-1}(C)$ $0 \le \theta \le 1$
- 须证明

透视函数

- 证明：凸集C在透视函数下的原象为凸集

$$P^{-1}(C)=\{(x,t)\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x/t\in C,\ t>0\}$$

- 考虑 $(x,t)\in P^{-1}(C)$ $(y,s)\in P^{-1}(C)$ $0\le\theta\le 1$
- 须证明 $\theta(x,t)+(1-\theta)(y,s)\in P^{-1}(C)$
- 等价于 $\dfrac{\theta x+(1-\theta)y}{\theta t+(1-\theta)s}\in C$

透视函数

- 证明：凸集C在透视函数下的原象为凸集

$$P^{-1}(C)=\{(x,t)\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x/t\in C,\ t>0\}$$

- 考虑 $(x,t)\in P^{-1}(C)$ $(y,s)\in P^{-1}(C)$ $0\le\theta\le 1$
- 须证明 $\theta(x,t)+(1-\theta)(y,s)\in P^{-1}(C)$
- 等价于 $\dfrac{\theta x+(1-\theta)y}{\theta t+(1-\theta)s}\in C$

$$\frac{\theta x+(1-\theta)y}{\theta t+(1-\theta)s}=\mu(x/t)+(1-\mu)(y/s)$$

透视函数

- 证明：凸集C在透视函数下的原象为凸集

$$P^{-1}(C)=\{(x,t)\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x/t\in C,\ t>0\}$$

- 考虑 $(x,t)\in P^{-1}(C)$ $(y,s)\in P^{-1}(C)$ $0\le\theta\le 1$
- 须证明 $\theta(x,t)+(1-\theta)(y,s)\in P^{-1}(C)$
- 等价于 $$\frac{\theta x+(1-\theta)y}{\theta t+(1-\theta)s}\in C$$

$$\frac{\theta x+(1-\theta)y}{\theta t+(1-\theta)s}=\mu(x/t)+(1-\mu)(y/s)$$

$$\mu=\frac{\theta t}{\theta t+(1-\theta)s}\in[0,1]$$

线性分式

线性分式

- 线性分式 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

线性分式

- 线性分式 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

$$f(x) = \frac{Ax+b}{c^Tx+d}, \qquad \textbf{dom}\, f = \{x \mid c^Tx + d > 0\}$$

线性分式

- 线性分式 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

$$f(x) = \frac{Ax+b}{c^T x + d}, \qquad \mathbf{dom}\, f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$$

- 仿射函数和透视函数的复合函数 $f = P \circ g$

线性分式

- 线性分式 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

$$f(x) = \frac{Ax+b}{c^T x + d}, \qquad \textbf{dom}\, f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$$

- 仿射函数和透视函数的复合函数 $f = P \circ g$
  - 仿射函数 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{m+1}$

线性分式

- 线性分式 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

$$f(x) = \frac{Ax + b}{c^T x + d}, \qquad \mathbf{dom}\, f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$$

- 仿射函数和透视函数的复合函数 $f = P \circ g$
  - 仿射函数 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{m+1}$

$$g(x) = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

线性分式

- 线性分式 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

$$f(x) = \frac{Ax+b}{c^T x + d}, \qquad \mathbf{dom}\, f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$$

- 仿射函数和透视函数的复合函数 $f = P \circ g$
  - 仿射函数 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{m+1}$

$$g(x) = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

- 凸集在线性分式下的象和原象均为凸集

线性分式

线性分式

- 例：两个随机变量的联合概率---条件概率

线性分式

- 例：两个随机变量的联合概率---条件概率
  - 随机变量u和v：$\{\mathbf{1},\ldots,n\}$,$\{\mathbf{1},\ldots,m\}$

线性分式

- 例：两个随机变量的联合概率---条件概率
  - 随机变量u和v：$\{1,\ldots n\},\{1,\ldots,m\}$
  - $P_{ij}=P(u=i, v=j)$

线性分式

- 例：两个随机变量的联合概率---条件概率
  - 随机变量u和v：$\{1,\ldots,n\},\{1,\ldots,m\}$
  - $P_{ij}=P(u=i, v=j)$
  - $f_{ij}= P(u=i| v=j)$

线性分式

- 例：两个随机变量的联合概率---条件概率
  - 随机变量u和v：$\{1,\ldots,n\},\{1,\ldots,m\}$
  - $P_{ij}=P(u=i, v=j)$
  - $f_{ij}= P(u=i| v=j)$

$$f_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} p_{kj}}$$

线性分式

- 例：两个随机变量的联合概率---条件概率
  - 随机变量u和v：**{1,…n},{1,…,m}**
  - $P_{ij}=P(u=i, v=j)$
  - $f_{ij}= P(u=i| v=j)$

$$f_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} p_{kj}}$$

  - A=[0,0,…,1,...,0]

线性分式

- 例：两个随机变量的联合概率---条件概率
  - 随机变量u和v：**{1,…,n},{1,…,m}**
  - $P_{ij}=P(u=i, v=j)$
  - $f_{ij}= P(u=i| v=j)$

$$f_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} p_{kj}}$$

  - $A=[0,0,\ldots,1,\ldots,0]$
  - $c=[1,1,1,\ldots,1]$

线性分式

- 例：两个随机变量的联合概率---条件概率
  - 随机变量u和v：**{1,…,n},{1,…,m}**
  - $P_{ij}=P(u=i, v=j)$
  - $f_{ij}= P(u=i| v=j)$

$$f_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} p_{kj}}$$

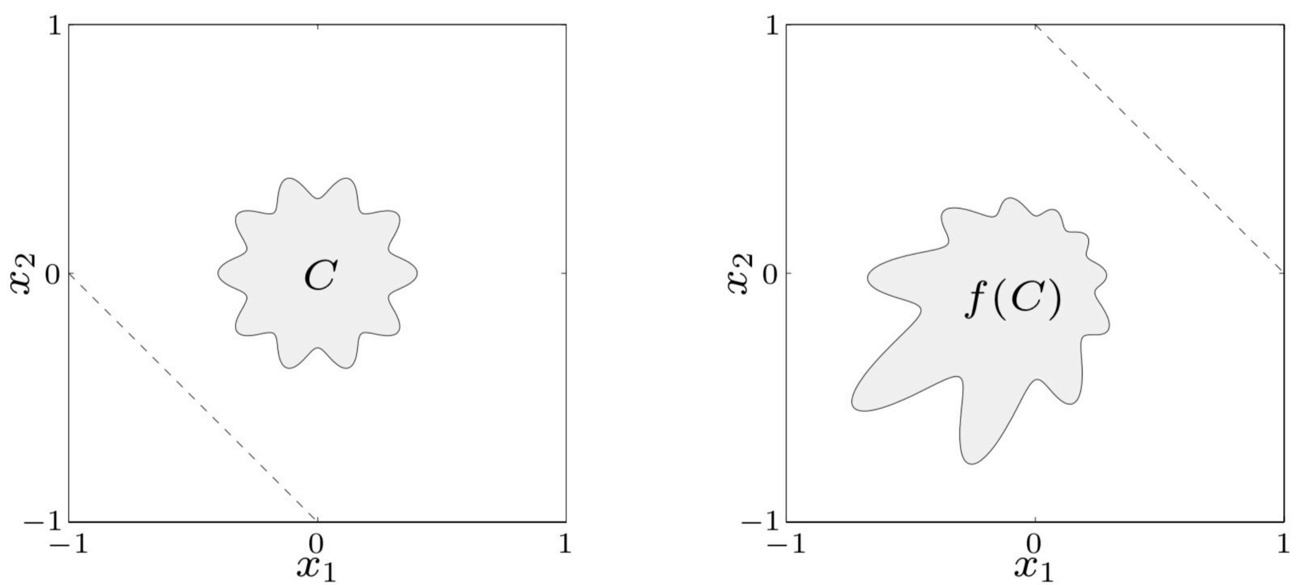
  - $A=[0,0,\ldots,1,\ldots,0]$
  - $c=[1,1,1,\ldots,1]$

$$f(x) = \frac{Ax+b}{c^T x + d}$$

透视函数和线性分式

❑ 例：线性分式

$$f(x) = \frac{1}{x_1 + x_2 + 1} x$$



广义不等式

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足
  - K是闭的（包含其边界）

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足
  - K是闭的（包含其边界）
  - K是实的（没有空的内部）

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足
  - K是闭的（包含其边界）
  - K是实的（没有空的内部）
  - K是尖的（不包含直线）

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足
  - K是闭的（包含其边界）
  - K是实的（没有空的内部）
  - K是尖的（不包含直线）

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足
  - K是闭的（包含其边界）
  - K是实的（没有空的内部）
  - K是尖的（不包含直线）

- 例：

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足
  - K是闭的（包含其边界）
  - K是实的（没有空的内部）
  - K是尖的（不包含直线）

- 例：
  - 非负象限 $K = \mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足
  - K是闭的（包含其边界）
  - K是实的（没有空的内部）
  - K是尖的（不包含直线）

- 例：
  - 非负象限 $K = \mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$
  - 半正定锥 $K = \mathbf{S}^n_+$

广义不等式

- 若锥 $K \subseteq \mathbf{R}^n$ 为正常锥，则其满足
  - K是闭的（包含其边界）
  - K是实的（没有空的内部）
  - K是尖的（不包含直线）

- 例:
  - 非负象限 $K = \mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$
  - 半正定锥 $K = \mathbf{S}^n_+$
  - **[0,1]**上非负的多项式锥:

$$K = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1} \geq 0 \text{ for } t \in [0,1]\}$$

广义不等式

广义不等式

- 使用正常锥K定义广义不等式:

广义不等式

- 使用正常锥*K*定义广义不等式：

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K, \qquad x \prec_K y \iff y - x \in \mathbf{int}\, K$$

广义不等式

- 使用正常锥*K*定义广义不等式：

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K, \qquad x \prec_K y \iff y - x \in \textbf{int}\, K$$

- 例：
  - 分量不等式

广义不等式

- 使用正常锥K定义广义不等式:

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K, \qquad x \prec_K y \iff y - x \in \textbf{int}\, K$$

- 例:
  - 分量不等式($K = \mathbf{R}^n_+$)

$$x \preceq_{\mathbf{R}^n_+} y \iff x_i \le y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

广义不等式

- 使用正常锥*K*定义广义不等式:

$$x \preceq_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K, \qquad x \prec_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in \textbf{int}\, K$$

- 例:
  - 分量不等式$(K = \mathbf{R}^n_+)$

    $$x \preceq_{\mathbf{R}^n_+} y \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \le y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$
  - 矩阵不等式 $(K = \mathbf{S}^n_+)$

    $$X \preceq_{\mathbf{S}^n_+} Y \quad \Longleftrightarrow \quad Y - X \text{ 为半正定}$$

广义不等式

- 使用正常锥K定义广义不等式:

$$x \preceq_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K, \qquad x \prec_K y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in \mathbf{int}\, K$$

- 例:
  - 分量不等式$(K = \mathbf{R}^n_+)$

    $$x \preceq_{\mathbf{R}^n_+} y \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \le y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

  - 矩阵不等式 $(K = \mathbf{S}^n_+)$

    $$X \preceq_{\mathbf{S}^n_+} Y \quad \Longleftrightarrow \quad Y - X \text{ 为半正定}$$

- 性质:$\preceq_K$的许多性质和实数集上$\le$的性质一致

广义不等式

- 使用正常锥K定义广义不等式：

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K, \qquad x \prec_K y \iff y - x \in \textbf{int}\, K$$

- 例：
  - 分量不等式($K = \mathbf{R}^n_+$)

  $$x \preceq_{\mathbf{R}^n_+} y \iff x_i \le y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

  - 矩阵不等式 ($K = \mathbf{S}^n_+$)

  $$X \preceq_{\mathbf{S}^n_+} Y \iff Y - X \text{ 为半正定}$$

- 性质：$\preceq_K$的许多性质和实数集上$\le$的性质一致

$$x \preceq_K y, \quad u \preceq_K v \implies x + u \preceq_K y + v$$

最小与极小元

最小与极小元

- $\preceq_K$不是一个线性序：可同时满足 $x \not\preceq_K y$ 和 $y \not\preceq_K x$

最小与极小元

- $\preceq_K$不是一个线性序：可同时满足 $x \not\preceq_K y$ 和 $y \not\preceq_K x$
- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$的最小元，则其满足：

最小与极小元

- $\preceq_K$不是一个线性序：可同时满足 $x \not\preceq_K y$ 和 $y \not\preceq_K x$
- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$的最小元，则其满足：

$$y \in S \quad \Longrightarrow \quad x \preceq_K y$$

最小与极小元

- $\preceq_K$不是一个线性序：可同时满足 $x \not\preceq_K y$ 和 $y \not\preceq_K x$
- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$的最小元，则其满足：

$$y \in S \quad \Longrightarrow \quad x \preceq_K y$$

- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$ 的极小元，则其满足：

最小与极小元

- $\preceq_K$不是一个线性序：可同时满足 $x \not\preceq_K y$ 和 $y \not\preceq_K x$
- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$的最小元，则其满足：

$$y \in S \quad \Longrightarrow \quad x \preceq_K y$$

- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$ 的极小元，则其满足：

$$y \in S, \quad y \preceq_K x \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

最小与极小元

- $\preceq_K$不是一个线性序：可同时满足 $x \not\preceq_K y$ 和 $y \not\preceq_K x$
- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$的最小元，则其满足：

$$y \in S \quad \Longrightarrow \quad x \preceq_K y$$

- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$ 的极小元，则其满足：

$$y \in S, \quad y \preceq_K x \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

- 例：$(K = \mathbf{R}_+^2)$
  - x_1是集合S_1的最小元
  - x_2是集合S_2的极小元

最小与极小元

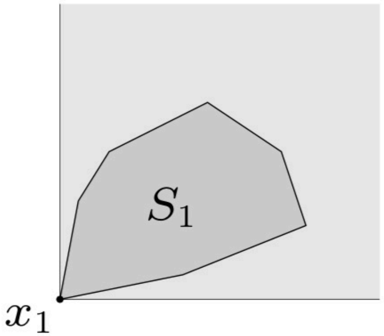
- $\preceq_K$不是一个线性序：可同时满足 $x \not\preceq_K y$ 和 $y \not\preceq_K x$
- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$的最小元，则其满足：

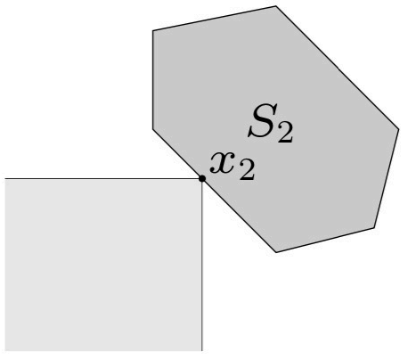
$$y \in S \quad \Longrightarrow \quad x \preceq_K y$$

- $x \in S$是集合S关于 $\preceq_K$ 的极小元，则其满足：

$$y \in S, \quad y \preceq_K x \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

- 例：$(K = \mathbf{R}^2_+)$
  - x_1是集合S_1的最小元
  - x_2是集合S_2的极小元





超平面分离定理

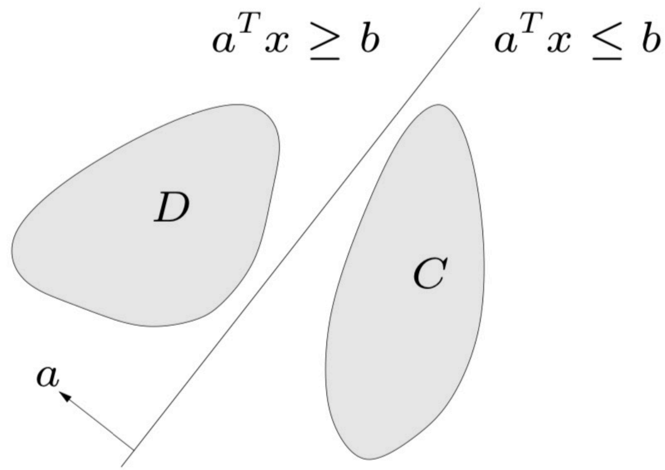
超平面分离定理

- 若C和D为两个不相交的凸集，则存在 $a \neq 0,\ b$

超平面分离定理

- 若C和D为两个不相交的凸集，则存在 $a \neq 0,\ b$

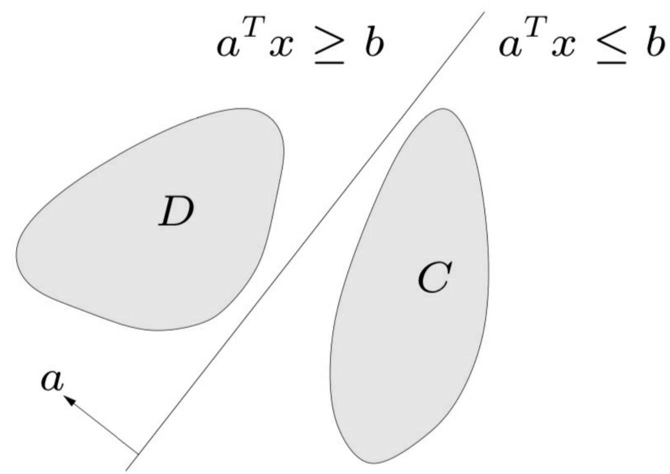
$$a^T x \leq b \text{ for } x \in C, \qquad a^T x \geq b \text{ for } x \in D$$



超平面分离定理

- 若C和D为两个不相交的凸集，则存在 $a \neq 0$, b

$$a^T x \leq b \text{ for } x \in C, \qquad a^T x \geq b \text{ for } x \in D$$

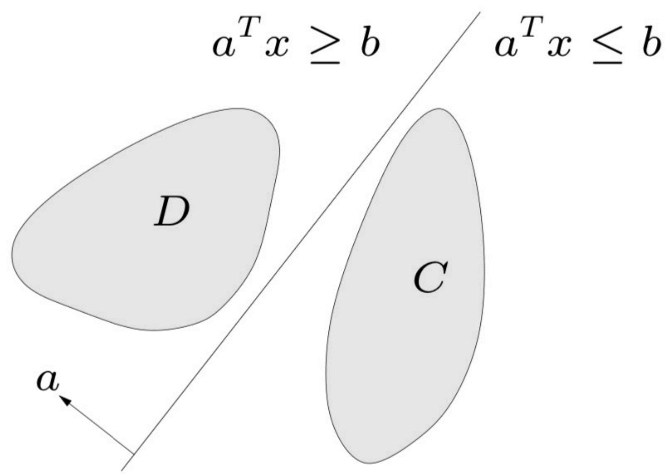


- 则超平面$\{x \mid a^T x = b\}$为集合C和D的分离超平面

超平面分离定理

- 若C和D为两个不相交的凸集，则存在 $a \neq 0, b$

$$a^T x \leq b \text{ for } x \in C, \qquad a^T x \geq b \text{ for } x \in D$$



- 则超平面$\{x \mid a^T x = b\}$为集合C和D的分离超平面
- 严格的分离需要额外的条件（如，C是闭的，D是单元素集）

支撑超平面

支撑超平面

- 集合C在边界点x_0的支撑超平面定义为：

支撑超平面

- 集合C在边界点x_0的支撑超平面定义为：

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$$

支撑超平面

- 集合C在边界点x_0的支撑超平面定义为：

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$$

- 此处，

支撑超平面

- 集合C在边界点x_0的支撑超平面定义为：

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$$

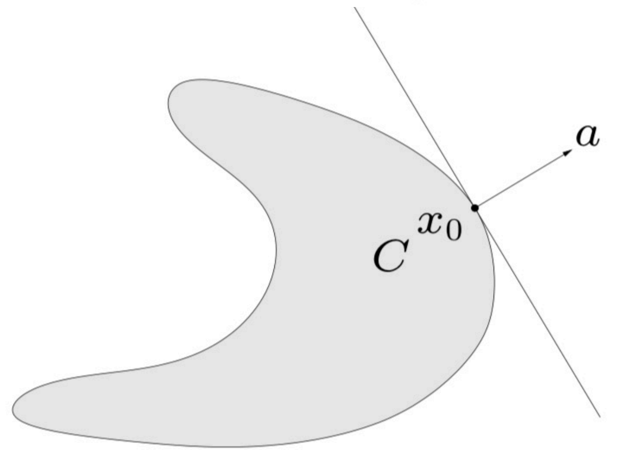
- 此处，$a \neq 0$ 且 $a^T x \leq a^T x_0$ for all $x \in C$

支撑超平面

- 集合C在边界点x_0的支撑超平面定义为：

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$$

- 此处，$a \neq 0$ 且 $a^T x \leq a^T x_0$ for all $x \in C$

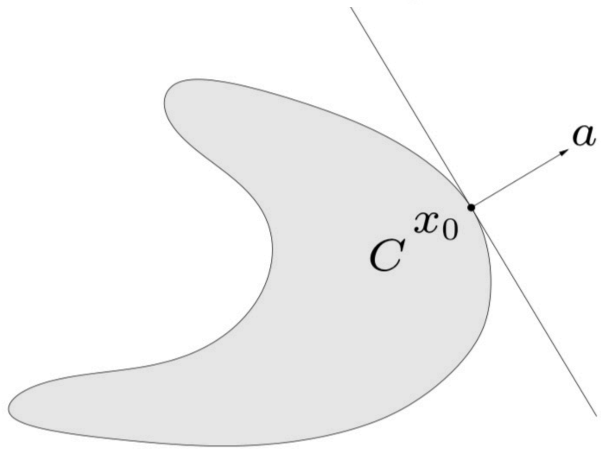


支撑超平面

- 集合C在边界点x_0的支撑超平面定义为：

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$$

- 此处，$a \neq 0$ 且 $a^T x \leq a^T x_0$ for all $x \in C$

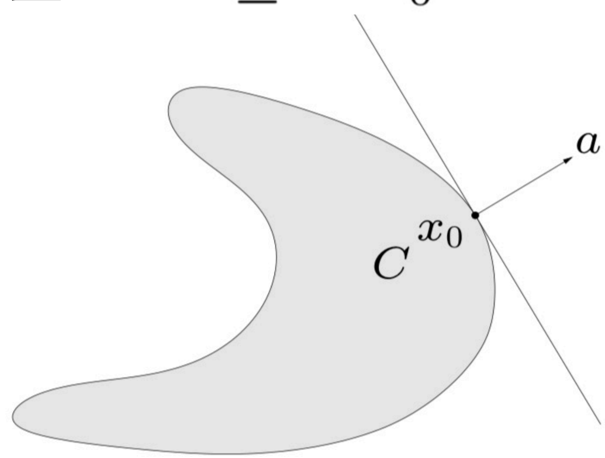


支撑超平面

- 集合C在边界点x_0的支撑超平面定义为：

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$$

- 此处，$a \neq 0$ 且 $a^T x \leq a^T x_0$ for all $x \in C$



- 支撑超平面定理：若集合C为凸集，则在集合C的每个边界点均存在一个支撑超平面

对偶锥和广义不等式

对偶锥和广义不等式

- 锥K的对偶锥：

对偶锥和广义不等式

- 锥K的对偶锥：

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\}$$

对偶锥和广义不等式

- 锥K的对偶锥：

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\}$$

- 例：

对偶锥和广义不等式

- 锥K的对偶锥：

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\}$$

- 例：

$$K = \mathbf{R}^n_+ : \; K^* = \mathbf{R}^n_+$$

$$K = \mathbf{S}^n_+ : \; K^* = \mathbf{S}^n_+$$

$$K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\} : \; K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$$

$$K = \{(x,t) \mid \|x\|_1 \leq t\} : \; K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$$

对偶锥和广义不等式

- 锥K的对偶锥：

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\}$$

- 例：

$$K = \mathbf{R}^n_+ \text{: } K^* = \mathbf{R}^n_+$$

$$K = \mathbf{S}^n_+ \text{: } K^* = \mathbf{S}^n_+$$

$$K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\} \text{: } K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$$

$$K = \{(x,t) \mid \|x\|_1 \leq t\} \text{: } K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$$

- 前三个锥自对偶

对偶锥和广义不等式

- 锥K的对偶锥：

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\}$$

- 例：

$$K = \mathbf{R}_+^n:\ K^* = \mathbf{R}_+^n$$

$$K = \mathbf{S}_+^n:\ K^* = \mathbf{S}_+^n$$

$$K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}:\ K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$$

$$K = \{(x,t) \mid \|x\|_1 \leq t\}:\ K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$$

- 前三个锥自对偶
- 正常锥的对偶锥仍为正常锥，因此可定义广义不等式：

对偶锥和广义不等式

- 锥K的对偶锥：

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \text{ for all } x \in K\}$$

- 例：

$$K = \mathbf{R}^n_+ :\ K^* = \mathbf{R}^n_+$$

$$K = \mathbf{S}^n_+ :\ K^* = \mathbf{S}^n_+$$

$$K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\} :\ K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$$

$$K = \{(x,t) \mid \|x\|_1 \leq t\} :\ K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$$

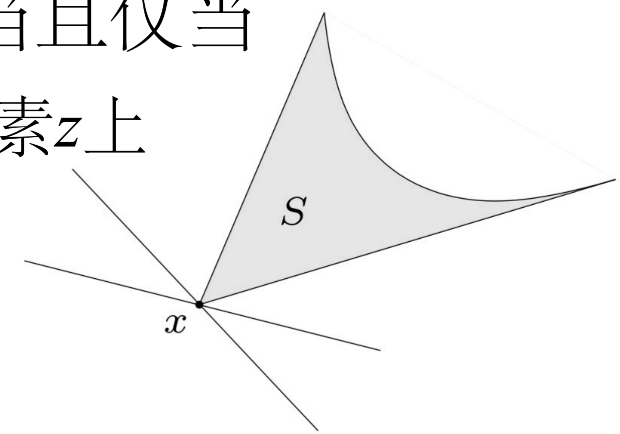
- 前三个锥自对偶
- 正常锥的对偶锥仍为正常锥，因此可定义广义不等式：

$$y \succeq_{K^*} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y^T x \geq 0 \text{ for all } x \succeq_K 0$$

对偶不等式的最小和极小元

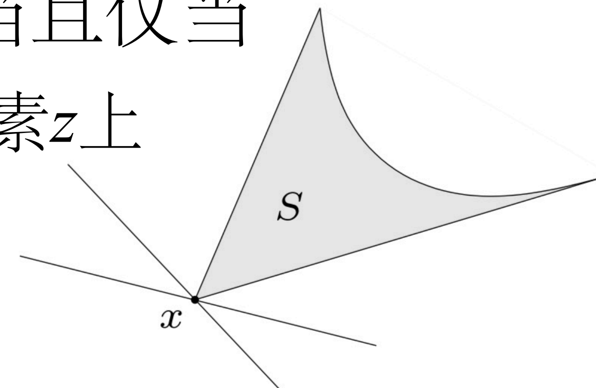
对偶不等式的最小和极小元

- 最小元：x为集合S的最小元，当且仅当
  - 对所有 $\lambda \succ_{K^*} 0$ ，x为集合S中元素z上极小化 $\lambda^T z$ 的唯一最优解



对偶不等式的最小和极小元

- 最小元：x为集合S的最小元，当且仅当
  - 对所有 $\lambda \succ_{K^*} 0$ ，x为集合S中元素z上极小化 $\lambda^T z$ 的唯一最优解



- 极小元：
  - 若对某些$\lambda \succ_{K^*} 0$，x在集合S中元素z上极小化 $\lambda^T z$，则x为极小元
  - 若x为凸集S的极小元，则存在非零 $\lambda \succ_{K^*} 0$，满足x极小化 $\lambda^T z$